

# Der quantisierte Hall-Effekt

## (The Quantized Hall Effect)

*Anleitung zum F-Praktikum: Versuch 504*

*(Lab Tutorial. In German.)*

*Version 2.01 (30. 06. 97)*

RALF D. TSCHEUSCHNER\*

Angewandte Festkörperphysik

Ruhr-Universität Bochum

Universitätsstraße 150

D-44780 Bochum

2. Februar 2008

---

\**permanent email address:* ralfd@provi.de

Dieses Tutorial ist die vorläufig letzte Version einer bereits im praktischen Einsatz erprobten Praktikumsanleitung für das Experiment des quantisierten HALL-Effekts. Der Autor hat die Absicht, an diesem Skript keine inhaltlichen Ergänzungen mehr vorzunehmen, wäre aber dankbar für Hinweise auf Druckfehler und sachliche Fehler, die weiterhin korrigiert werden. Der Autor dankt allen Kommiliton *innen* für Anregung und Kritik.

Bochum, den 30.06.97

## Zusammenfassung

Die Physik niederdimensionaler Elektronensysteme in Halbleiter-Schichtstrukturen ist ein besonders aktuelles Arbeitsgebiet der modernen Festkörperphysik - sowohl im Hinblick auf die Grundlagenforschung als auch im Hinblick auf zukünftige technologische Anwendungen.

In dem vorliegenden Versuch untersuchen wir Systeme von untereinander als nicht-wechselwirkend angenommenen Elektronen in zwei Raumdimensionen, sogenannte 2-dimensionale Elektronengase (2DEG). Diese können an Halbleiter-Grenzflächen, so zum Beispiel in einer *Metall-Oxid-Halbleiter-Struktur (MOS)* oder an einer Grenzfläche zwischen Halbleitern verschiedener Bandlücke, einer sogenannten *Heterostruktur* (griech. *heteros* = der andere von beiden, verschieden, anders beschaffen), realisiert werden. Im ersten Fall ist es die extern angelegte Gatespannung, im zweiten Fall die geeignete Dotierung zusammen mit einem Bandlückensprung, die eine Bandverbiegung verursacht, welche zu einem in erster Näherung dreiecksförmigen Potentialtopf führt. Durch die endliche Ausdehnung des elektronischen Systems in Richtung der dritten Dimension zeichnen sich die Elektronen (oder Löcher) durch quantisierte Energieniveaus in einer Richtung aus. Ist nur das unterste Subband besetzt, so haben wir ein physikalisches System vorliegen, welches sich durch eine 2-dimensionale quantenmechanische Kinematik auszeichnet.

Ein besonderer Impuls in der Erforschung des 2-dimensionalen Elektronengases ging von der Entdeckung des quantisierten HALL-Effekts aus. VON KLITZING fand 1980 in einem MOS-System, daß bei genügend tiefen Temperaturen und in hohen Magnetfeldern der HALL-Widerstand des 2-dimensionalen Elektronengases auf diskrete durch Naturkonstanten gegebene Plateaux quantisiert ist ( $h/ie^2$ , mit  $h$  = PLANCKSches Wirkungsquantum,  $e$  = elektrische Elementarladung,  $i = 1, 2, 3 \dots$ ). Für seine sensationelle Entdeckung erhielt VON KLITZING 1985 den Nobelpreis. Die heutige offizielle Definition des Widerstandsnormals basiert auf diesem Effekt.

Im vorliegenden Praktikumsversuch soll dieses Nobelpreisexperiment wiederholt werden; allerdings verwenden wir als Materialsystem eine  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs-Heterostruktur. An dieser untersuchen wir den elektrischen Transport bei niedrigen Temperaturen und hohen Magnetfeldern. Die Aufgabe besteht in der Realisierung von klassischem und quantisiertem HALL-Effekt, sowie in der Beobachtung von SHUBNI-

KOV-DE HAAS-Oszillationen und ihrem Übergang ins Quanten-HALL-Regime. Dazu wird es notwendig sein, sich mit den Grundlagen der Kryotechnik, mit der Magnetsteuerung und mit meßtechnischen Fragen (insbesondere Lock-In-Technik) vertraut zu machen. Ziel ist die Bestimmung der VON KLITZING-Konstante  $h/e^2$  und ihr Vergleich mit der SOMMERFELDSchen Feinstrukturkonstante  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ .

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Widerstand und Leitfähigkeit . . . . .	9
2.2	Der klassische Hall-Effekt . . . . .	13
2.3	Eine mögliche Quantisierung des Hall-Effekts . . . . .	18
2.4	Die Zyklotronbewegung der Elektronen . . . . .	19
2.5	Das Quanten-Regime . . . . .	23
2.6	Flußquanten versus Ladungsträger . . . . .	29
2.7	Beweis für die Abwesenheit des QHE im idealen 2DEG . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Von der Theorie zur Messung</b>	<b>39</b>
3.1	Experimentelle Realisierung von 2-dimensionalen Elektronengasen . . . . .	39
3.2	MOS-(metal-oxide-semiconductor-)Strukturen . . . . .	43
3.3	Heterostrukturen . . . . .	46
3.4	Vom 2-dimensionalen zum 3-dimensionalen Elektronengas: Subbänder . . . . .	49
3.5	2-dimensionales Elektronengas im Magnetfeld . . . . .	53
3.6	Drude-Modell für den klassischen Hall-Effekt . . . . .	55
3.7	Beobachtung des quantisierten Hall-Effekts . . . . .	61
3.8	Das chemische Potential . . . . .	64
3.9	Shubnikov-de Haas-Oszillationen . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Deutung des Effektes</b>	<b>70</b>
4.1	Eichtheoretisches Argument nach Laughlin . . . . .	70
4.2	Lokalisierungsbild (bulk states) . . . . .	74
4.3	Randkanal-Bild (edge states) . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Aufgaben</b>	<b>88</b>
5.1	Theorie . . . . .	88
5.2	Experiment . . . . .	91

5.3	Auswertung . . . . .	96
<b>6</b>	<b>Anhang: Physikalische Formelsammlung</b>	<b>100</b>
6.1	Allgemeine Physik . . . . .	100
6.1.1	Naturkonstanten . . . . .	100
6.1.2	Eigenschaften von Elementarteilchen . . . . .	101
6.1.3	Quantisierter Hall Effekt . . . . .	101
6.1.4	Energie <i>versus</i> Frequenz <i>versus</i> Temperatur etc. . . . .	102
6.1.5	Elektrodynamik . . . . .	102
6.1.6	Geophysikalische Konstanten . . . . .	103
6.1.7	Thermodynamik der Hohlraumstrahlung . . . . .	104
6.1.8	Atomphysik . . . . .	104
6.1.9	Molekülphysik . . . . .	105
6.2	Physik der Halbleiter, insbesondere GaAs . . . . .	105
6.2.1	Galliumarsenid . . . . .	105
6.2.2	Energieniveaus im Kastenpotential . . . . .	105
6.2.3	Zustandsdichten und Fermi-Energien . . . . .	106
6.2.4	Ladungstransport im klassischen Regime . . . . .	107
6.2.5	Hall-Messungen nach van der Pauw . . . . .	108
6.2.6	Gated 2DEG . . . . .	108
6.2.7	Elektronen im Magnetfeld . . . . .	109
6.2.8	Verarmung (Depletion) . . . . .	109
6.3	Mesa-Ätze für GaAs . . . . .	110
6.4	Weitere nützliche Formeln . . . . .	110

# 1 Vorwort

Die experimentelle Entdeckung des quantisierten HALL-Effekts durch VON KLITZING, DORDA und PEPPER besteht in der *Beobachtung von Plateaux* im HALL-Widerstand

$$R_H = U_H/I \quad (1)$$

von sogenannten MOS-(*metal-oxide-semiconductor*-) Strukturen bei niedrigen Temperaturen und hohen Magnetfeldern.

VON KLITZING sah als erster, daß die *exakte* Höhe dieser Plateaux gegeben ist durch ganzzahlige Bruchteile von  $h/e^2$ ,

$$R_H = \frac{h}{ie^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

wobei - wie üblich -  $h$  das PLANCKsche Wirkungsquantum und  $e$  die elektrische Elementarladung bezeichnen. Für seine sensationelle Entdeckung erhielt VON KLITZING 1985 den Nobelpreis. Die heutige offizielle Definition des Widerstandsnormal basiert auf diesem Effekt.

Die Originalarbeit ist zu finden unter [40].

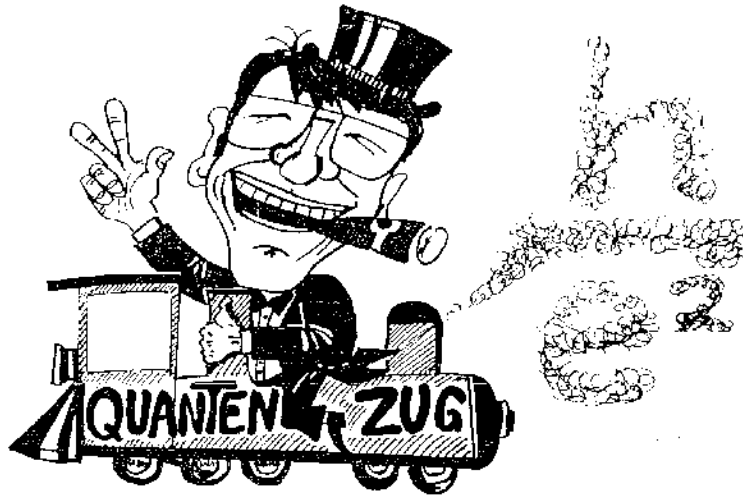


Abbildung 1: Der Entdecker des QHE: KLAUS VON KLITZING [47, 52]

Im vorliegenden Praktikumsversuch wollen wir ein ähnliches Experiment an einer sogenannten Heterostruktur durchführen. Dieses Skript soll die für den Versuch notwendigen

Kenntnisse vermitteln. Es ist so geschrieben, daß man es in einem Zug durchlesen und auch verstehen kann, vorausgesetzt, der Leser bringt eine Reihe von Vorkenntnissen mit, die zum Stoff des Hauptstudiums Physik gehören:

- Klassische Elektrodynamik (Vektorpotential und lokale Eichinvarianz),
- Quantenmechanik (Quantisierung, Harmonischer Oszillator, Dichteoperator, Erwartungswert),
- Thermodynamik (chemisches Potential),
- Festkörperphysik (Bandstruktur, Halbleiter),
- Meßtechnik, insbesondere Lock-In-Verstärker-Technik.

Selbstverständlich kann man diesen Versuch auch gleich nach dem Vordiplom durchziehen, wenn man bereit ist, sich einige Dinge autodidaktisch beizubringen. Dazu gehe man den Text durch und streiche diejenigen Begriffe an, deren Bedeutung nicht klar ist. Ein gutes Physiklexikon und ein Nachmittag in der Bibliothek helfen meist schon weiter. Trotzdem habe ich mich bemüht, diese Anleitung so *self-contained* wie möglich zu halten. In ihr ist eigentlich alles zu finden, was zum Verständnis der grundlegenden Prinzipien benötigt wird. (*Tip*: Der eilige Leser benötigt zunächst nur die Kapitel 2.1.-2.3.)

Zwei Dinge sollten die Studenten vor Beginn des Praktikums erledigen, nämlich

1. sich eine Kopie der Originalarbeit besorgen [40],
2. sich eine Kopie der Seiten 3-1 und 3-2 aus der Anleitung des Lock-In-Verstärkers SR850, erhältlich bei der Technik der Arbeitsgruppe, aushändigen lassen [62].

Viel Erfolg!



## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Widerstand und Leitfähigkeit

Nach dem wohlbekannten OHMschen Gesetz ist der durch einen metallischen Leiter konstanter Temperatur fließende elektrische Strom  $I$  proportional zur angelegten Spannung  $U$

$$I \propto U. \quad (3)$$

Ausgedrückt durch den absoluten Widerstand  $R$  (gemessen in Ohm  $\Omega = V/A$ ) bzw. durch den absoluten Leitwert  $\Gamma$  (gemessen in Siemens  $S = A/V$ ) können wir schreiben

$$I \cdot R = U \quad \text{bzw.} \quad I = \Gamma \cdot U. \quad (4)$$

Im Labor haben wir es üblicherweise mit Proben zu tun, die bestimmte Abmessungen haben; die Naturgesetze sollten aber in Termen von *Invarianten* ausgedrückt werden.<sup>1</sup> Diese Forderung legt uns nahe, die obigen Beziehungen unter Zuhilfenahme *spezifischer Größen*, das heißt abmessungsunabhängiger Größen, zu formulieren. Räumliche Isotropie vorausgesetzt, schreiben wir

$$\mathbf{j} \varrho = \varrho \mathbf{j} = \mathbf{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (5)$$

wobei die Stromdichte gegeben ist durch

$$\mathbf{j} = \frac{I}{A} \cdot \mathbf{u}, \quad (6)$$

mit  $A$  als Betrag der durchflossenen Fläche und  $\mathbf{u}$  als zugeordnetem Normalenvektor der Länge 1 (engl. *unit vector*).  $\varrho$  nennen wir den *spezifischen Widerstand* und  $\sigma$  die *spezifische Leitfähigkeit*. Verstehen wir diese beiden Größen als skalare Größen, so können wir setzen

$$\varrho = \frac{R \cdot A}{l} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \frac{l}{R \cdot A}. \quad (7)$$

Im allgemeinen Fall, in dem die Proben sich in elektromagnetischer Hinsicht anisotrop verhalten (zum Beispiel unter Einfluß eines homogenen Magnetfeldes oder der Symmetrie-

---

<sup>1</sup>Dieses entspricht dem Geist der Werke von HELMHOLTZ, VAN DER WAERDEN und WEYL.

Eigenschaften der Kristallstruktur), *müssen* wir  $\varrho$  und  $\sigma$  als Matrixoperatoren (oder Tensoren) auffassen. Wir schreiben sie daher (wie Vektoren) fett:

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\varrho} \mathbf{j} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{j} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}. \quad (8)$$

Nun hat in  $D$  Raumdimensionen der spezifische Widerstand - definiert als Widerstand mal durchflossene (im allgemeinen  $D-1$ -dimensionale) Querschnittsfläche pro (im allgemeinen 1-dimensionalen) Länge - die physikalische Dimension

„Widerstand mal Länge hoch  $D-2$ “ ,

somit der spezifische Leitwert die physikalische Dimension

„Länge hoch  $D-2$  durch Widerstand“.

Das bedeutet, daß in einem idealisierten 2-dimensionalen System, in der sich der Strom längs einer 2-dimensionalen Fläche bewegt und die durchflossenen Querschnitte 1-dimensional sind, der spezifische Widerstand die Einheit eines absoluten Widerstandes, die spezifische Leitfähigkeit die Einheit eines absoluten Leitwerts besitzt.

Letzteres allein könnte schon die Vermutung nahelegen, daß es ein Leitfähigkeitsexperiment an einer quasi-2-dimensionalen Probe geben könnte, das die *spezifischen* Größen *ohne* Bezugnahme auf die *tatsächlichen Abmessungen* der Probe mißt!

Ein weiterer interessanter Aspekt ergibt sich aus einer einfachen Dimensionsanalyse, die sogar mit nur rudimentären Kenntnissen quantenmechanischer Prinzipien erfolgen kann. Einerseits gilt nämlich für die physikalische Dimension (phys. dim.) des Widerstandes

$$\begin{aligned} \text{phys. dim. } R &= \text{phys. dim. } \frac{U}{I} \\ &= \frac{\text{Spannung}}{\text{Stromstärke}} \\ &= \frac{\text{Energie pro Ladung}}{\text{Ladung pro Zeit}} \\ &= \frac{\text{Energie mal Zeit}}{\text{Ladung zum Quadrat}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung zum Quadrat}}; \quad (9)$$

andererseits dürfen wir zumindestens formal schreiben

$$\begin{aligned} \text{phys. dim. } R &= \frac{\text{Wirkung}}{\text{Ladung zum Quadrat}} \\ &= \frac{\text{Quantenzahl}}{\text{Quantenzahl zum Quadrat}} \cdot \frac{\text{Wirkungsquantum}}{\text{Elementarquantum zum Quadrat}} \\ &= \text{rationale Zahl} \cdot \frac{h}{e^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

wobei

$$\frac{h}{e^2} = 25.812\,805 \dots \text{ k}\Omega. \quad (11)$$

Allein aus den soeben plausibel gemachten Konzepten hätte man die Spekulation rechtfertigen können, daß es möglicherweise ein idealisiertes 2-dimensionales Experiment geben könnte, in dem Quanteneffekte eine wesentliche Rolle spielen (also zum Beispiel bei tiefen Temperaturen) und in dem unabhängig von den Abmessungen der Probe rational quantisierte Widerstände bzw. rational oder gar *integral quantisierte* Leitfähigkeiten - in Einheiten von  $e^2/h$  - beobachtbar sind. Und vielleicht hätte es gar nicht so fern gelegen, sich vorzustellen, dies könnte ein HALL-Experiment sein. Schon SOMMERFELD und BETHE spekulierten 1933, also viele Jahre vor VON KLITZINGS Entdeckung, in Ihrem klassischen Lehrbuch über den Einfluß der Quantisierung der Elektronenbahnen auf das Verhalten des (longitudinalen) Magnetowiderstandes hinreichend kalter Proben [61].

Noch aufregender sind die Daten von KAWAJI *et al.* aus dem Jahre 1975 [29], die bereits die wesentliche Struktur sichtbar machen. Es bedurfte aber einer genialen Interpretation dieser Stufen, nämlich in Termen fundamentaler Naturkonstanten, und dem Schluß, daß die Quantisierung *exakt* ist, um aus dem Phänomen eine bahnbrechende Entdeckung zu machen.

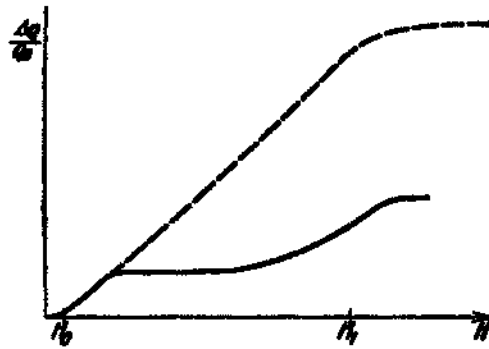


Abb. 55. Möglicher Verlauf der magnetischen Widerstandsänderung bei tiefen Temperaturen als Funktion der magnetischen Feldstärke. Aus qualitativen theoretischen Überlegungen folgt, daß die Widerstandsänderung wahrscheinlich etwa wie die ausgezogene Kurve verläuft. Eventuell wäre auch der gestrichelte Verlauf denkbar, der mit den Experimenten übereinstimmen würde.

Abbildung 2: Vermutetes Verhalten nach SOMMERFELD und BETHE 1933 [61]

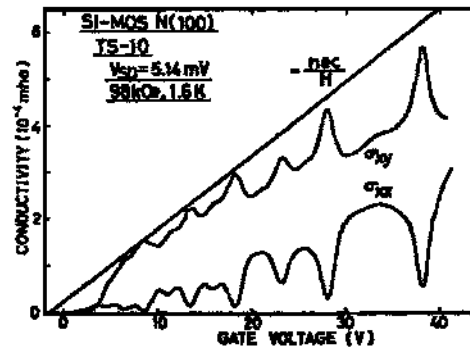


Fig. 2.  $\sigma_{xx}$  and  $\sigma_{xy}$  versus gate voltage.

Abbildung 3: Die Daten von KAWAJI *et al.* aus dem Jahre 1975

## 2.2 Der klassische Hall-Effekt

Der klassische HALL-Effekt beschreibt die Wirkung eines Magnetfeldes  $\mathbf{B}$  auf einen elektrischen Strom  $\mathbf{j}$  in einer leitenden Probe mit einer geeignet gewählten Geometrie: Liege der rechteckige leitende Streifen mit den Abmessungen  $L_x, L_y, L_z$  in x-, y-, z-Richtung in der xy-Ebene und fließe der Strom in x-Richtung. Die Einwirkung eines Magnetfeldes in z-Richtung führt zum Abfall einer Spannung in y-Richtung, die wir zwischen der oberen und unteren Kante der Probe abgreifen können. Eine Umkehrung der Stromrichtung oder der Richtung des senkrecht zur xy-Ebene ausgerichteten Magnetfeldes ändert die Polarität der beobachteten Spannung.

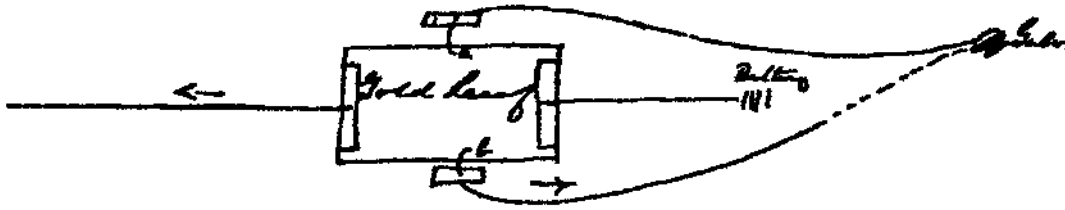


Abbildung 4: Das klassische Experiment nach HALL [26]

In mathematischen Termen: Sei also

$$\mathbf{j} = (j_x, 0, 0), \quad (12)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0), \quad (13)$$

sowie

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z). \quad (14)$$

Im klassischen Regime ist der *longitudinale Magnetowiderstand*

$$\varrho_{xx}(\mathbf{B}) = \frac{E_x}{j_x} \quad (15)$$

vom Magnetfeld unabhängig, der *transversale Magnetowiderstand*

$$\varrho_{yx}(\mathbf{B}) = \frac{E_y}{j_x} \quad (16)$$

proportional zum angewendeten Magnetfeld, so daß es Sinn macht, die sogenannte *Hall-Konstante*

$$R_{Hall} = \frac{R_H}{B} = \frac{E_y}{j_x B} \quad (17)$$

zu definieren.

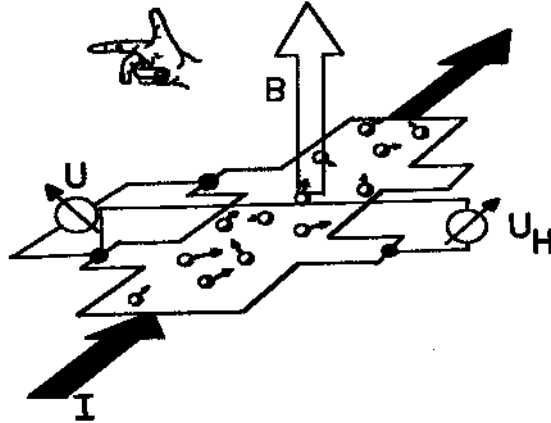


Abbildung 5: Typische HALL-Geometrie

Die Ursache dieses sogenannten HALL-Effektes liegt natürlich in der LORENTZ-Kraft, welche auf die durch den Festkörper sich bewegenden Ladungsträger wirkt. Aus ihrer Kenntnis können wir das Verhältnis von beobachteter HALL-Spannung zu dem in x-Richtung fließenden Strom, den sogenannten HALL-Widerstand, herleiten. Diese Vorstellung kann bereits im Rahmen des relativ einfachen Einteilchen-Bildes entwickelt werden.

Sei  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit der Elektronen. Mit  $e$  als Elementarladung schreibt sich die bekannte, universell gültige hydrodynamische Beziehung, welche die Stromdichte eines Transportphänomens in Relation zu Teilchendichte und -geschwindigkeit setzt, für einen Strom von Elektronen *in drei Raumdimensionen* als

$$\mathbf{j}_{3D} = e n_{3D} \mathbf{v}. \quad (18)$$

$n_{3D}$  bezeichnet hier die 3D-Dichte, das heißt, für den Fall unserer Probengeometrie ist (mit  $N_e$  als Anzahl der Ladungsträger)

$$n_{3D} = \frac{N_e}{L_x \cdot L_y \cdot L_z} \quad (19)$$

und somit

$$\mathbf{j}_{3D} = e \cdot \frac{N_e}{L_x \cdot L_y \cdot L_z} \cdot \mathbf{v}. \quad (20)$$

*Bemerkung:* Um uns jetzt und in Zukunft Schreibarbeit zu ersparen, verwenden wir *per conventionem* die sogenannte *technische Stromrichtung*: Die relevanten Ladungsträger fließen vom Pluspol zum Minuspol. Mit anderen Worten: Wenn wir nicht ausdrücklich etwas Gegenteiliges behaupten, tun wir so, als seien die Elektronen positiv geladen.

Nun entspricht der Betrag  $v$  der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Ladungsträgers in x-Richtung gerade dem Quotienten  $L_x/t$  aus der Probenlänge  $L_x$  und dem Zeitintervall  $t$ , die er braucht, um eben diese Länge zu durchlaufen, wir haben also

$$j_{3D} = e \cdot \frac{N_e \cdot v}{L_x \cdot L_y \cdot L_z} = e \cdot \frac{N_e \cdot L_x/t}{L_x \cdot L_y \cdot L_z} = e \cdot \frac{N_e/t}{L_y \cdot L_z} = \frac{I}{L_y \cdot L_z}, \quad (21)$$

wobei wir ausgenutzt haben, daß der Strom gerade die mit der Elementarladung  $e$  multiplizierte Anzahl  $N_e/t$  von Ladungsträgern ist, die pro Zeitintervall  $t$  die Probe durchlaufen haben.

Fassen wir das System als räumlich 2-dimensional auf, so ignorieren wir die Ausdehnung in z-Richtung. In diesem Fall setzen wir einfach

$$\mathbf{j}_{2D} = e n_{2D} \mathbf{v}. \quad (22)$$

Insbesondere gilt für die von uns gewählte Geometrie

$$j_{2D,x} = \frac{I}{L_y} = e n_{2D} v_x. \quad (23)$$

Zurück zum HALL-Effekt: Einen stationären Zustand haben wir offensichtlich dann vorliegen, wenn die LORENTZ-Kraft  $\mathbf{F}_B$  und die elektrostatische Kraft  $\mathbf{F}_H$ , welche proportional zum Gradienten der HALL-Spannung  $U_H$  ist, sich gerade ausgleichen:

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_H \quad (24)$$

mit

$$\mathbf{F}_H = e \mathbf{E}_H, \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_B = e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (26)$$

Einsetzen ergibt sofort

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{E}_H. \quad (27)$$

Da in unserer Geometrie

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (v_x, 0, 0) \times (0, 0, B_z) = (0, -v_x B_z, 0), \quad (28)$$

$$\mathbf{E}_H = (0, E_y, 0) = (0, U_H/L_y, 0), \quad (29)$$

erhalten wir

$$v_x B_z = E_y \quad (30)$$

und mit

$$v_x = \frac{I}{L_y} \frac{1}{e n_{2D}} \quad (31)$$

schließlich

$$\frac{I}{L_y} \frac{B_z}{e n_{2D}} = \frac{U_H}{L_y}. \quad (32)$$

Der Ausdruck für die HALL-Spannung lautet somit

$$U_H = \frac{B_z}{e n_{2D}} I =: R_H I, \quad (33)$$

das heißt, es ist

$$R_H = \frac{B_z}{e n_{2D}} \quad (34)$$

und somit

$$\sigma_H = \frac{e n_{2D}}{B_z}. \quad (35)$$

Wie bereits dargestellt, normiert man den HALL-Widerstand  $R_H$  auch auf das angelegte Magnetfeld gemäß

$$R_{Hall} = \frac{R_H}{B} = \frac{1}{e n_{2D}} \quad (36)$$

und definiert dadurch die schon erwähnte HALL-Konstante. Als EDWIN HERBERT HALL in den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts seine Experimente durchführte, bemerkte er, daß das Vorzeichen der Ladung  $e$  - je nach betrachtetem Material - sowohl positiv als auch negativ sein konnte. Dies war der erste Hinweis auf den Unterschied zwischen Elektronen- und Löcher-Leitung. Die im allgemeinen magnetfeldabhängige Beziehung

$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{j}, \quad (37)$$



wobei  $\varrho$  als Tensorgröße (bzw. Matrixoperator) zu verstehen ist, nennen Theoretiker das OHM-HALL-Gesetz.

## 2.3 Eine mögliche Quantisierung des Hall-Effekts

Die klassische Beziehung

$$R_H = \frac{B_z}{en_{2D}} \quad (38)$$

kann man natürlich auch anders schreiben, nämlich - unter Verwendung des PLANCKschen Wirkungsquantums - als

$$R_H = \frac{h}{\left(\frac{hn_{2D}}{eB_z}\right)e^2}. \quad (39)$$

Nun erkennen wir in

$$\Phi_0 = \frac{h}{e} \quad (40)$$

das LONDONSche Flußquantum wieder, eine Größe, die vielerlei Bedeutung hat (siehe unten), die aber am einfachsten zu verstehen ist als die quantenmechanische Realisierung des Konzepts der magnetischen Feldlinie. Messen wir die Stärke des Magnetfeldes  $B_z$  in Einheiten von  $\Phi_0$ , so zählen wir magnetische Feldlinien ab. Ihre Anzahl ist gegeben durch

$$n_{\Phi_0} = \frac{B_z}{\Phi_0} = \frac{B_z}{h/e}, \quad (41)$$

so daß

$$R_H = \frac{h}{\left(\frac{n_{2D}}{n_{\Phi_0}}\right)e^2} =: \frac{h}{\nu e^2}. \quad (42)$$

An dieser Stelle können wir bereits den Schluß ziehen: Treten in einen idealisierten 2-dimensionalen System nicht nur die elektrischen Ladungen, sondern auch die magnetischen Flußlinien in Form von elementaren Quanten auf, so ist der *Füllfaktor*

$$\nu = \frac{n_{2D}}{n_{\Phi_0}} \quad (43)$$

eine ganze (bzw. rationale) Zahl. Der HALL-Widerstand erfüllt dann eine Quantisierungsregel gemäß

$$R_H = \frac{h}{\nu e^2}. \quad (44)$$

Die zentrale Frage ist, worin die mikroskopische Ursache für ein solches Verhalten zu suchen ist. Zur Diskussion dieser Frage legen wir unser Augenmerk zunächst auf die Kinematik des fraglichen Systems.

## 2.4 Die Zyklotronbewegung der Elektronen

Springen wir noch einmal zurück zu der im stationären Fall gültigen Beziehung

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\mathbf{E}_H, \quad (45)$$

die wir aus Gründen der Mnemonik - unter Weglassung des Index - jetzt schreiben als

$$0 = e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (46)$$

Manchmal ist es nützlich, zu einer etwas abstrakteren und gleichzeitig eleganteren Formulierung überzugehen. Statt

$$v_x = \frac{1}{e n_{2D}} \frac{I}{L_y} \quad (47)$$

schreiben wir jetzt

$$\mathbf{v} = \frac{1}{e n_{2D}} \cdot \mathbf{j}_{2D}, \quad (48)$$

so daß wir die Gleichung

$$0 = e n_{2D} U_H - I B_z \quad (49)$$

in der Form

$$0 = e n_{2D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j}_{2D} \times \mathbf{B} \quad (50)$$

wiedererkennen. Ihre Lösung kann - ebenso elegant - geschrieben werden als

$$\mathbf{j}_{2D} = e n_{2D} \cdot \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}}{B^2}, \quad (51)$$

was für die Absolutbeträge impliziert

$$|\mathbf{j}_{2D}| = \frac{e n_{2D}}{B} |\mathbf{E}| = R_H |\mathbf{E}|, \quad \mathbf{j}_{2D} \perp \mathbf{E}. \quad (52)$$

Gehen wir jetzt über die stationäre Näherung hinaus und betrachten die volle klassische Dynamik unter Einbeziehung des Kreisens der Elektronen im Magnetfeld, der sogenannten *Zyklotronbewegung*. Ihre physikalische Ursache ist wieder - die LORENTZ-Kraft.

Erinnern wir uns an das, was wir in der Vorlesung über Theoretische Mechanik gelernt haben [21]: Die Gleichung für die LORENTZ-Kraft kann hergeleitet werden aus der LAGRANGE-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + e \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} - e V(\mathbf{x}, t) \quad (53)$$

vermittels Anwendung der LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (54)$$

Man zeigt dieses, indem man die totale Zeitableitung unter Anwendung der Kettenregel in eine Summe partieller Ableitungen entwickelt

$$\frac{d}{dt} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \ddot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (55)$$

und den resultierenden Ausdruck in die LAGRANGE-Gleichungen einsetzt

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_i} \ddot{x}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial x_j \partial \dot{x}_i} \dot{x}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0. \quad (56)$$

Wir erhalten

$$m\ddot{x}_i + e \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + e \frac{\partial A_i}{\partial t} + \left( e \frac{\partial V}{\partial x_i} - e \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \dot{x}_j \right) = 0 \quad (57)$$

bzw.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= e \left( -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \dot{x}_j \left( \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) \\ &= e \left( -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \dot{x}_j \left( (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im}) \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right) \\ &= e \left( -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \dot{x}_j \left( (\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}) \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right) \\ &= e \left( -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + e \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j \left( (\varepsilon_{klm}) \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (58)$$

Dabei haben wir die EINSTEINSche Summenkonvention verwendet, welche annimmt, daß grundsätzlich über gleiche Indizes summiert wird.

$\varepsilon_{klm}$  ist der total antisymmetrische oder LEVY-CIVITA-Tensor in 3D.<sup>2</sup> Er erfüllt die von uns soeben ausgenutzte Identität

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jl}\delta_{im} \quad (59)$$

und definiert das bekannte Vektor- oder GIBBS-Produkt durch

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \varepsilon_{klm} a_l b_m. \quad (60)$$

---

<sup>2</sup> $\varepsilon_{123} = 1$ ,  $\varepsilon_{231} = -1$  und zyklische Vertauschungen ... alle anderen gleich 0

In einer etwas geläufigeren Schreibweise erkennen wir in der obigen Bewegungsgleichung diejenige für ein Teilchen wieder, welches sich unter dem Einfluß eine LORENTZ-Kraft bewegt

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} &= e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})) \\ &= e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \end{aligned} \quad (61)$$

wobei

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}. \quad (62)$$

Es sei daran erinnert, daß, obwohl die homogenen LAGRANGESchen Gleichungen hier ihre Gültigkeit behalten, das hier betrachtete System nicht konservativ ist im üblichen Sinne: Die LORENTZ-Kraft ist nicht der *Gradient* eines Potentials

$$\mathbf{F} \neq -\mathbf{grad} U, \quad (63)$$

sondern es gilt

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} U + \frac{d}{dt} \mathbf{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} U, \quad (64)$$

mit dem *geschwindigkeitsabhängigen Potential*

$$U = eV - e\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}. \quad (65)$$

Eine Bewegungsgleichung für das HALL-Problem, welche über die stationäre Näherung hinausgeht, hat somit die Form

$$m\dot{\mathbf{v}} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (66)$$

oder als Bewegungsgleichung für den Strom geschrieben

$$\frac{m}{e} \frac{d\mathbf{j}_{2D}}{dt} = e n_{2D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{j}_{2D} \times \mathbf{B}. \quad (67)$$

Ihre Lösung ist gegeben durch

$$\mathbf{j}_{2D}(t) = e n_{2D} \cdot \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}}{B^2} + \exp(t\boldsymbol{\omega}_c \times) \mathbf{j}_{2D,0}, \quad (68)$$

wobei

$$\boldsymbol{\omega}_c = (0, 0, \omega_c), \quad (69)$$

mit der trickreichen als Operatoridentität auffaßbaren Schreibweise

$$(\boldsymbol{\omega}_c \times) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_c & 0 \\ \omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Der Exponentialoperator ist durch seine Entwicklung in seine Potenzreihe definiert<sup>3</sup> und  $\mathbf{j}_{2D,0}$  durch die Anfangsbedingung zu einer festen Zeit gegeben. Einsetzen der Lösung in die Gleichung ergibt für den Betrag der Winkelgeschwindigkeit oder die sogenannte *Zyklotronfrequenz*

$$|\boldsymbol{\omega}_c| = \frac{eB}{m}. \quad (72)$$

---

<sup>3</sup>Man sieht sofort, was gemeint ist, wenn man sich klarmacht, daß für drei normierte und orthogonale Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  gilt

$$\exp(\varphi \mathbf{e}_z \times) \mathbf{e}_x = (\cos \varphi) \mathbf{e}_x + (\sin \varphi) \mathbf{e}_y. \quad (71)$$

## 2.5 Das Quanten-Regime

Im Bereich tiefer Temperaturen dominieren Quanteneffekte (der HAMILTON-Operator dominiert über  $kT$ ). Verhalten sich die Ladungsträger in der Probe wie ein 2-dimensionales Elektronengas (also wie ein idealisiertes System nicht wechselwirkender Elektronen, die sich in einem 2-dimensionalen Raum aufhalten), so ist der entsprechende Einteilchen-HAMILTON-Operator durch LANDAUS Formel gegeben [44]:

$$H_L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m}, \quad (73)$$

wobei  $\mathbf{A}$  hier - wie üblich - das Vektorpotential bezeichnet.

In dem hier betrachteten Problem ist das Magnetfeld zeitlich konstant, räumlich homogen und in z-Richtung orientiert. Ein solches Magnetfeld wird am besten durch die Rotation eines Vektorpotentials in der *isotropen Eichung* dargestellt, das heißt, es ist

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \left( \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \right) \quad (74)$$

mit

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_z), \quad \mathbf{A} = (-B_z y/2, B_z x/2, 0) \quad (75)$$

und

$$B = B_z = \text{const.} \quad (76)$$

Während die Komponenten des kanonischen Impulses  $\mathbf{p}$  die kanonischen Vertauschungsrelationen erfüllen, also untereinander kommutieren, tun dies die Komponenten des sogenannten kinetischen Impulses (dem Produkt aus Masse und Geschwindigkeit)

$$K_j = p_j - eA_j = mv_j \quad (77)$$

nicht, sondern es gilt in der für uns relevanten Geometrie

$$[K_x, K_y] = i\hbar \cdot eB_z \quad (78)$$

mit

$$H = \frac{K_x^2 + K_y^2}{2m} \quad (79)$$

und

$$B = B_z = \text{const.} \quad (80)$$

Diese Situation ist analog zu der des harmonischen Oszillators. Insbesondere haben wir die Entsprechungen

$$\text{2D-LANDAU} \longleftrightarrow \text{1D-Oszillator}$$

$$H = \frac{K_y^2}{2m} + \frac{K_x^2}{2m} \longleftrightarrow H = \frac{P^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\Omega^2 Q^2$$

$$K_y \longleftrightarrow P$$

$$m \longleftrightarrow \mu$$

$$K_x \longleftrightarrow \mu\Omega \cdot Q$$

$$[K_x, K_y] = i\hbar e B_z \longleftrightarrow [\mu\Omega \cdot Q, P] = \mu\Omega \cdot [Q, P] = \mu\Omega \cdot i\hbar; \quad (81)$$

letzteres heißt natürlich

$$[Q, P] = i\hbar. \quad (82)$$

Für die beteiligten  $c$ -Zahlen<sup>4</sup> gelten die Zuordnungen

$$\text{2D-LANDAU} \longleftrightarrow \text{1D-Oszillator}$$

$$i\hbar \cdot e B_z \longleftrightarrow i\hbar \cdot \mu\Omega$$

$$m \longleftrightarrow \mu$$

---

<sup>4</sup> $c$ -Zahlen sind als *classical numbers* kommutierende Größen,  $q$ -Zahlen als *quantized numbers* im allgemeinen nicht-kommutierende Größen, also Operatoren. Diese Sprechweise ist in der mathematischen Physik weit verbreitet und geht auf frühe Zeiten der Quantentheorie zurück.



$$i\hbar \cdot \frac{eB_z}{m} \longleftrightarrow i\hbar \cdot \Omega = i\hbar \cdot \sqrt{\frac{D}{\mu}}, \quad (83)$$

mit  $D$  als Federkonstante.

Mit anderen Worten: Ein 2-dimensionales mechanisches System in einem konstanten äußeren Magnetfeld entspricht von seiner algebraischen Struktur her einem ein-dimensionalen harmonischen Oszillator.<sup>5</sup>

Entsprechend der Analogie-Beziehung

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) (\hbar e B_z) \left(\frac{1}{m}\right) \longleftrightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \Omega \quad (84)$$

bzw.

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \left(\frac{eB_z}{m}\right) \longleftrightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \Omega \quad (85)$$

haben die Energieniveaux der Ladungsträger diskrete Werte, die *modulo* einer gemeinsamen additiven Konstante, welche den Energienullpunkt festlegt, allesamt Vielfache der PLANCKschen Konstante  $\hbar$  sind. Die Bedeutung der Bewegungskonstante

$$\omega_c = \frac{eB}{m}, \quad (86)$$

wobei wir statt  $B_z$  ab jetzt nur noch  $B$  schreiben, wird deutlich wenn wir uns vergegenwärtigen, daß die Elektronen in einem konstanten homogenen Magnetfeld bei verschwindendem äußerem elektrischen Feld eine Zyklotronbewegung (engl. *cyclotron motion*) vollführen, also Kreisbahnen durchlaufen, für welche die LORENTZ-Kraft der Zentralkraft die Waage hält. Es ist also

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad (87)$$

und somit

$$m\omega_c^2 r = e \cdot \omega_c r \cdot B, \quad (88)$$

---

<sup>5</sup>Die Nichtkommutativität hat aber in beiden Fällen einen unterschiedlichen physikalischen Ursprung. Neuerdings nennt man in der mathematischen Physik eine ganze Reihe von nicht-kommutativen Strukturen „quantisiert“, obwohl sie keinen direkten *physikalischen* Bezug zur Quantentheorie im Sinne von HEISENBERG-BORN-JORDAN-DIRAC haben.

woraus obige Beziehung folgt.

Für die quantisierten Energieniveaux der Zyklotronbewegung folgt unter Einbeziehung der Tatsache, daß der Energienullpunkt im allgemeinen separat festgelegt werden muß

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c + \text{const.} \quad (89)$$

*Bemerkung:* Eine nicht zu unterschätzende Vorsicht muß darin geübt werden, es nicht zu Verwechslungen von klassischen und quantenmechanischen Konzepten kommen zu lassen. Dies ist nicht anders als beim geläufigen Beispiel des harmonischen Oszillators: Klassisch berechnet sich seine Energie gemäß

$$\begin{aligned} E_{cl} &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} D x^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} \mu \Omega^2 x^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 A^2 (\cos \Omega t)^2 + \frac{1}{2} \mu \Omega^2 A^2 (\sin \Omega t)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu \Omega^2 A^2. \end{aligned} \quad (90)$$

Quantenmechanisch hingegen ist

$$E_{qu} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \Omega. \quad (91)$$

Klassisch hängt seine Energie quadratisch von der Frequenz  $\Omega$  und quadratisch von der Amplitude  $A$  ab. Quantenmechanisch hingegen hängt seine Energie linear von der Frequenz  $\Omega$  (*modulo* einer Nullpunktsenergie) und linear von der Quantenzahl  $n$  ab. Für hohe Quantenzahlen allerdings muß die quantentheoretische Beschreibung in die klassische übergehen. Dies ist dann der Fall, wenn

$$n \rightarrow \infty \quad (92)$$

und asymptotisch gilt

$$n \approx \frac{\mu \Omega A^2}{2\hbar}. \quad (93)$$

Für die Zyklotronbewegung ist klassisch

$$\begin{aligned} E_{cl} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega_c^2 r^2, \end{aligned} \quad (94)$$

quantenmechanisch hingegen

$$E_{qu} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c. \quad (95)$$

Der klassische Grenzfall der quantenmechanischen Beschreibung ist nun charakterisiert durch

$$n \rightarrow \infty \quad (96)$$

mit

$$n \approx \frac{m\omega_c r^2}{2\hbar}. \quad (97)$$

Für die klassische Zyklotronbewegung erhalten wir den Bahnradius aus Gleichsetzen von LORENTZ-Kraft und Zentralkraft

$$r_{class} = \frac{mv^2}{evB} = \frac{\sqrt{2m \cdot mv^2/2}}{eB} = \frac{\sqrt{2mE}}{eB}. \quad (98)$$

Setzen wir anstelle der klassischen kinetischen Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2/2 \quad (99)$$

die quantenmechanische Nullpunktsenergie

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega_c \quad (100)$$

in die obige Gleichung ein, definieren wir eine *magnetische Länge*

$$l_B = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega_c/2}}{eB} = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (101)$$

Dies ist die fundamentale Länge des LANDAU-Problems. Wir schreiben auch

$$\frac{h}{eB} = \frac{2\pi\hbar}{eB} = 2\pi l_B^2. \quad (102)$$

Das zugeordnete Nullpunktsorbital, welches man sich *nicht* als eine Kreisbewegung im klassischen Sinne vorstellen darf, entspricht - im Sinne der von uns betrachteten Analogie - der Nullpunktsschwingung eines harmonischen Oszillators.

## 2.6 Flußquanten versus Ladungsträger

Die Größe

$$\Phi_0 = \frac{h}{e} \quad (103)$$

nennen wir das einer elektrischen Ladung  $e$  zugeordnete *magnetische Flußquantum*. Seine Bedeutung liegt im AHARONOV-BOHM-Effekt [19, 18, 2]: Wie bereits FRANZ bemerkte [19], beeinflußt der von einer Elektronenwelle eingeschlossene magnetische Fluß deren Wellenzahl (*besser*: Phase). EHRENBERG und SIDAY wiesen in ihrer bahnbrechenden elektronenoptischen Arbeit darauf hin, daß ein solcher Einfluß auch dann bestehen bleibt, wenn die in zwei kohärente Teilstrahlen aufgespaltene Elektronenwelle nirgendwo ein magnetisches Feld durchläuft. AHARONOV und BOHM gaben diesem Effekt schließlich Ihren Namen und hoben die physikalische Bedeutung des Vektorpotentials in der Quantenmechanik hervor.

Das Interferenzmuster in einem Beugungsexperiment eines elektrisch abgeschirmten magnetischen Flusses  $\Phi$  hängt also ab vom *nicht-integrablen Phasenfaktor* [74]

$$\exp \frac{ie}{\hbar} \oint_{\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \exp \frac{ie}{\hbar} \iint_S \mathbf{rot} \mathbf{A} d\mathbf{F} = \exp \frac{ie}{\hbar} \Phi, \quad (104)$$

der gerade ein Vielfaches der Eins ist, wenn

$$\Phi = n \cdot \frac{h}{e} =: n \cdot \Phi_0, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (105)$$

In diesem Fall ist die Flußlinie quantenmechanisch nicht observabel. In der LANDAU-GINZBURG-Theorie der Supraleitung ist die zentrale Größe ein Ordnungsparameter, der eine gewisse formale Ähnlichkeit zu einer quantenmechanischen Wellenfunktion besitzt. Die Theorie ist allerdings nur dann mit der mikroskopischen Theorie à la BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER verträglich, wenn die elektrische Ladung der „supraleitenden Elektronen“, der sogenannten COOPER-Paare, statt  $e$  genau doppelt so hoch ist, nämlich  $2e$ . Demzufolge haben die magnetischen Flußquanten der Supraleitung den Wert  $h/2e$ . Sie manifestieren sich als Flußschläuche oder ABRIKOSOV-Vortizes, die in das supraleitende Medium unter bestimmten Umständen eindringen können.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Und es ist geradezu eine Ironie der Geschichte, daß in der vollständigen Theorie die Flußquanten wieder observabel werden, nämlich durch Quasiteilchen-Moden im Vortextkern, sogenannte chirale Fermionen, die man sich als eingefangene Irrläufer „halber COOPER-Paare“ denken darf.

Wir wollen nun zeigen, daß auch im quantisierten HALL-Effekt die Flußquanten eine entscheidende Rolle spielen.

Wegen der (näherungsweisen) Translationsinvarianz des Systems (in x- und y-Richtung) ist jedes dieser LANDAU-Niveaux hochgradig entartet.<sup>7 8</sup> Um exakt zu sein: Im Falle eines unendlich ausgedehnten Systems ist die Entartung tatsächlich unendlich; denn aus einer vorgegebenen Lösung können wir durch Anwendung von x- und y-Translationen beliebig viele andere erzeugen. Im Falle eines endlich ausgedehnten Systems, zum Beispiel mit den Abmessungen  $L_x \times L_y$  könnte man versuchen, in der üblichen Weise die Zustandsdichte auszurechnen [41]: Man stelle sich die Wellenfunktionen als stehende Wellen vor

$$\begin{aligned}\psi(0, y) &= \psi(L_x, y) = 0 \\ \psi(x, 0) &= \psi(x, L_y) = 0\end{aligned}\tag{106}$$

oder fordere - dem Transportproblem angemessener - wenigstens periodische Randbedingungen

$$\begin{aligned}\psi(x + L_x, y) &= \psi(x, y) \\ \psi(x, y + L_y) &= \psi(x, y)\end{aligned}$$

und zähle die Zustände bis hin zu einer vorgegebenen Grenzenergie ab [41]. Die nach dieser Energie abgeleitete Anzahl der Zustände ist die Zustandddichte des 2-dimensionalen Elektronengases in dem betrachteten endlich ausgedehnten System. Weiter unten werden wir diese Rechnung explizit durchführen und auch das richtige Ergebnis erhalten.

Dieser Zugang ist aber nicht wirklich begründet, wenn wir davon ausgehen, daß das System sich in einem homogenen Magnetfeld befindet und die Wellenfunktionen ausgedehnt sind. Die Wahl der Randbedingungen muß nämlich die lokale Eichinvarianz (*engl.* local gauge invariance) erfüllen, eines der grundlegenden Prinzipien von Quantenmechanik und

---

<sup>7</sup>Für die explizite Behandlung der SCHRÖDINGER-Gleichung im konstanten äußeren Magnetfeld sei der Leser auf das Lehrbuch von LANDAU und LIFSHITZ verwiesen [44].

<sup>8</sup>An dieser Stelle sei nur erwähnt, daß - wegen der mathematischen Form des Vektorpotentials - die Eigenzustände der HAMILTON-Funktion des LANDAU-Problems denen der z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators  $\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \mathbf{grad}$  entsprechen.

Elektrodynamik. Eine lokal eichinvariante Randbedingung, welche die Anwesenheit des Magnetfeldes respektieren würde, hätte die Form

$$\begin{aligned}\psi(x + L_x, y) &= \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar} \alpha(x, y) \right\} \cdot \psi(x, y) \\ \psi(x, y + L_y) &= \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar} \beta(x, y) \right\} \cdot \psi(x, y)\end{aligned}\tag{107}$$

und gleichzeitig

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x + L_x, y) &= \mathbf{A}(x, y) + \mathbf{grad} \alpha(x, y) \\ \mathbf{A}(x, y + L_y) &= \mathbf{A}(x, y) + \mathbf{grad} \beta(x, y).\end{aligned}\tag{108}$$

Somit ist für ein geeignet gewähltes Koordinatensystem: ( $\partial$  steht für Rand)

$$\begin{aligned}\Phi &= B \cdot L_x L_y \\ &= \int_{L_x \times L_y} \mathbf{B}(x, y) d\mathbf{S} \\ &= \int_{L_x \times L_y} \mathbf{rot} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{S} \\ &= \oint_{\partial(L_x \times L_y)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} \\ &= \int_{(0,0) \rightarrow (L_x,0)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} + \int_{(L_x,0) \rightarrow (L_x,L_y)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} + \\ &\quad + \int_{(L_x,L_y) \rightarrow (0,L_y)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} + \int_{(0,L_y) \rightarrow (0,0)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} \\ &= \int_{(0,0) \rightarrow (L_x,0)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} - \int_{(0,L_y) \rightarrow (L_x,L_y)} \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{l} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{(L_x,0) \rightarrow (L_x,L_y)} \mathbf{A}(x,y) d\mathbf{l} - \int_{(0,0) \rightarrow (0,L_y)} \mathbf{A}(x,y) d\mathbf{l} \\
= & \int_{(0,0) \rightarrow (L_x,0)} \mathbf{A}(x,y) d\mathbf{l} - \int_{(0,0) \rightarrow (L_x,0)} \mathbf{A}(x,y+L_y) d\mathbf{l} + \\
& + \int_{(0,0) \rightarrow (0,L_y)} \mathbf{A}(x+L_x,y) d\mathbf{l} - \int_{(0,0) \rightarrow (0,L_y)} \mathbf{A}(x,y) d\mathbf{l} \\
= & - \int_{(0,0) \rightarrow (L_x,0)} \mathbf{grad} \beta(x,y) d\mathbf{l} + \int_{(0,0) \rightarrow (0,L_y)} \mathbf{grad} \alpha(x,y) d\mathbf{l} \\
= & - [\beta(L_x,0) - \beta(0,0)] + [\alpha(0,L_y) - \alpha(0,0)]. \tag{109}
\end{aligned}$$

Wenn also  $\alpha$  und  $\beta$  identisch verschwinden würden - wie im Falle periodischer Randbedingungen im konventionellen Sinne - wäre der Gesamtfluß durch die Probe identisch Null! Lokale Eichinvarianz *erzwingt* die Verwendung von Randbedingungen, welche die Wellenfunktionen *modulo* einer Phase festlegen. Diese ist im allgemeinen wegababhängig (*griech.* anholonom).

Eindeutigkeit der Wellenfunktion verlangt nun, daß die Phase  $\varphi$  der Wellenfunktion

$$\Psi = \varrho \cdot \exp i\varphi \tag{110}$$

sich am Rand um ein Vielfaches von  $2\pi$  dreht. Das heißt, die Schleife

$$\varphi(0,0) \rightarrow \varphi(L_x,0) \rightarrow \varphi(L_x,L_y) \rightarrow \varphi(0,L_y) \rightarrow \varphi(0,0) \tag{111}$$

muß (für  $L_x = L_y$ ) gehen wie

$$0 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot 2\pi n \rightarrow \frac{2}{4} \cdot 2\pi n \rightarrow \frac{3}{4} \cdot 2\pi n \rightarrow \frac{4}{4} \cdot 2\pi n. \tag{112}$$

Für unseren Fall bedeutet dies, daß

$$\begin{aligned}
1 &= \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar} \cdot (-[\beta(L_x,0) - \beta(0,0)] + [\alpha(0,L_y) - \alpha(0,0)]) \right\} \\
&= \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar} \Phi \right\} \tag{113}
\end{aligned}$$



und somit

$$\Phi = 2\pi \frac{\hbar}{e} n = \frac{h}{e} n =: n_{\Phi_0} \cdot \Phi_0. \quad (114)$$

Mit anderen Worten: Wenn die Wellenfunktion ausgedehnt ist, muß der Fluß  $\Phi$  in Einheiten des Flußquantums

$$\Phi_0 = h/e \quad (115)$$

quantisiert sein. Die Anzahl  $n_{\Phi_0}$  der Flußquanten pro Einheitsfläche berechnet sich aus

$$B = n_{\Phi_0} \cdot \Phi_0. \quad (116)$$

Die Probenfläche wird durch die Anwesenheit der Flußquanten parkettiert. Je höher das Magnetfeld ist, desto kleiner werden die Fliesen des Parketts. Da in einem endlich ausgedehnten System die Randbedingungen nur noch diskrete Translationen erlauben, welche die Parkettierung respektieren, entspricht der Entartungsgrad pro Einheitsfläche gerade der Anzahl der Flußquanten pro Einheitsfläche und ist gegeben durch

$$n_{\Phi_0} := \frac{eB}{h}. \quad (117)$$

Ein Check der Einheiten zeigt, das alles mit rechten Dingen zugeht, denn  $eB$  hat die Dimension einer Wirkung pro Fläche und  $n_{\Phi_0}$  ist eine Flächendichte, also ein Maß für die Teilchenzahl pro Fläche.

Wieviele Ladungsträger pro Flächeneinheit untergebracht werden können, wird nicht nur durch den Entartungsgrad, sondern auch durch die Tatsache vorgegeben, daß die Ladungsträger Fermionen sind.<sup>9</sup> Dies legt die Anzahl der *erlaubten* Zustände pro LANDAU-Niveau und Einheitsfläche fest. Wenn wir der Einfachheit halber den Spin und mögliche zusätzliche Quantenzahlen außer acht lassen, kann ein LANDAU-Niveau mit  $eB/h$  ununterscheidbaren fermionischen Ladungsträgern pro Einheitsfläche aufgefüllt werden. Wenn  $i$  Landau-Niveaus vollständig gefüllt sind, muß sich die HALL-Leitfähigkeit ergeben als

$$\sigma_H = \frac{e n_{2D}}{B} = i \cdot \frac{e^2}{h}, \quad (118)$$

---

<sup>9</sup>Mit anderen Worten: Die Elektronen erfüllen das PAULI-Prinzip. Letzteres ist eine Konsequenz der Tatsache, daß die Elektronen Fermionen sind, also ununterscheidbare Teilchen, die durch eine total antisymmetrische Vielteilchen-Wellenfunktion beschrieben werden.

wobei  $n_{2D}$  - wie oben - die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte bezeichnet. Offensichtlich kann diese Bedingung auch geschrieben werden als

$$n_{2D} = i \cdot \frac{eB}{h}. \quad (119)$$

Wenn also - im quantenmechanischen Limes  $T \rightarrow 0$  - das chemische Potential<sup>10</sup> genau zwischen zwei LANDAU-Niveaus liegt, muß die HALL-Leitfähigkeit quantisiert sein! Allerdings gibt es keinen Grund zu erwarten, daß in einem realen System das chemische Potential immer genau von der Mitte der einen Lücke zur Mitte der nächsten springt.

---

<sup>10</sup>Das chemische Potential charakterisiert die FERMI-Verteilung. Am absoluten Nullpunkt trennt es die besetzten von den unbesetzten Zuständen. (Eine detaillierte Erklärung folgt weiter unten.)

## 2.7 Beweis für die Abwesenheit des QHE im idealen 2DEG

In der Tat, ein mathematisch rigoroser Beweis zeigt, daß das ideale freie Elektronengas im unendlich großen Volumen *keinen* quantisierten HALL-Effekt zeigt. Im folgenden sei dieser Beweis kurz vorgestellt.

Aus der LAGRANGE-Funktion

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = T - U = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + e \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}} - e V(\mathbf{x}, t) \quad (120)$$

erhalten wir via LEGENDRE-Transformation die HAMILTON-Funktion

$$\begin{aligned} H(x, p, t) &= \mathbf{p} \dot{\mathbf{x}} - L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \\ &= (m \dot{\mathbf{x}} + e \mathbf{A}) \dot{\mathbf{x}} - \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - e \mathbf{A} \dot{\mathbf{x}} + e V(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + e V(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (121)$$

Im LANDAU-Fall gilt

$$\mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B} = \text{const} \quad (122)$$

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{x} \quad (123)$$

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E} = \text{const} \quad (124)$$

$$V(x, t) = \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}. \quad (125)$$

Die entsprechende HAMILTON-Funktion bezeichnen wir als  $H_{LE}$ .

Die HAMILTONschen Bewegungsgleichungen können auch durch die POISSON-Klammern

$$\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial B}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} \quad (126)$$

ausgedrückt werden [21]. So ist

$$\dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H_{LE}\}, \quad (127)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \{\mathbf{v}, H_{LE}\}, \quad (128)$$

$$\frac{d\mathbf{j}_{2D}}{dt} = \{\mathbf{j}_{2D}, H_{LE}\}. \quad (129)$$

Diese Formulierung ist von Nutzen, wenn wir das vorliegende System quantisieren wollen. Wir ersetzen die klassischen POISSON-Klammern durch die quantenmechanischen Kommutatoren multipliziert mit einem Faktor  $-i/\hbar$ . Für die quantenmechanischen Operatorgrößen

gilt somit<sup>11</sup>

$$\dot{\mathbf{x}} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{x}, H_{LE}], \quad (130)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{v}, H_{LE}], \quad (131)$$

$$\frac{d\mathbf{j}_{2D}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\mathbf{j}_{2D}, H_{LE}]. \quad (132)$$

Nun ist es eine wohlbekannte Tatsache, daß für den Fall, daß die HAMILTON-Funktion quadratisch in den Orts- und Impulsvariablen ist, die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen den klassischen entsprechen. Eine explizite Evaluation der Operatorgleichung verifiziert dies. So erhalten wir als Lösung

$$\mathbf{j}_{2D}(t) = e n_{2D} \cdot \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}}{B^2} + \exp(t\omega_c \times) \mathbf{j}_{2D,0}. \quad (133)$$

Um eine Vorhersage über den Meßwert des elektrischen Stroms in unserem HALL-Experiment zu machen, müssen wir den zeitgemittelten Erwartungswert

$$\overline{\langle \mathbf{j}_{2D}(t) \rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathbf{j}_{2D}(t) \rangle \quad (134)$$

des HEISENBERG-Stromoperators  $\mathbf{j}_{2D}(t)$  ausrechnen. Dabei ist zu beachten, daß wir thermodynamische Gleichgewichtszustände eines quantisierten fermionischen Systems betrachten müssen.

*Zur Erinnerung:* In der ersten Quantenmechanik-Vorlesung fängt man mit *reinen Zu-*

---

<sup>11</sup>Man beachte, daß die durch die POISSON-Klammern erzeugte algebraische Struktur im allgemeinen *nicht* zu der durch die quantenmechanischen Kommutatoren erzeugte Struktur isomorph ist, obwohl die Analogie sehr suggestiv ist und zum Repertoire vieler einführender Vorlesungen (und professionell arbeitender Wissenschaftler) gehört. Wäre dem so, würden sich klassische Mechanik und Quantenmechanik nicht wesentlich unterscheiden. Das Theorem von GROENEWOLD und VAN HOVE zeigt, daß eine „kanonische Quantisierung“, also die nach einem Kanon - einer Regel also - erfolgte Konstruktion eines quantenmechanischen Systems aus einem klassischen *nicht* möglich ist [1, 22, 67]. Im Grunde genommen ist dies nicht verwunderlich, ist doch die klassische Physik nur eine Näherung der quantenmechanischen. Und es ist nicht zu erwarten, daß man die exakte Theorie in einer wohldefinierten Weise aus einer approximativen herleitet: Kanonische Quantisierung ist allenfalls eine Heuristik wenn nicht die besondere Form eines akademischen Ratespiels.

*ständen* an, die durch Zustandsvektoren  $|\Psi\rangle$  beschrieben werden.<sup>12</sup> Der Erwartungswert einer Observablen  $A$  ist in diesem Fall gegeben durch

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \text{Spur} \{ |\Psi\rangle \langle \Psi| A \}. \quad (136)$$

In einem *gemischten Zustand* ist der Erwartungswert der Observable  $A$  gegeben durch

$$\langle A \rangle = \text{Spur} \{ \varrho A \}, \quad (137)$$

wobei der sogenannte *Dichteoperator* oder die *Dichtematrix* geschrieben werden kann als

$$\varrho = \sum_i \lambda_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (138)$$

mit den statistischen Gewichten

$$\lambda_i > 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1. \quad (139)$$

Die *thermische Dichtematrix*

$$\varrho = \exp -\beta H \quad (140)$$

ist nichts anderes als ein Operator, welcher in Analogie zum MAXWELL-BOLTZMANN-Faktor gesehen werden muß und einen gemischten Zustand repräsentiert, der ein quantenmechanisches System im thermodynamischen Gleichgewicht bei endlicher Temperatur beschreibt.

Ein System von Fermionen wird nun nicht durch den MAXWELL-BOLTZMANN-Faktor, sondern durch die FERMI-Verteilungsfunktion

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp \beta(E - \mu)} \quad (141)$$

charakterisiert, so daß der Erwartungswert einer Observable  $A$  für ein durch ein HAMILTON-Operator  $H$  beschriebenes fermionisches System mit Volumen  $V$  die Form

$$\langle A \rangle_{\beta, \mu} = \text{Spur}_V \{ f(H) A \} \quad (142)$$

---

<sup>12</sup>Meist verwendet man die Spektralampplituden  $\psi(q)$  der Zerlegung

$$|\Psi\rangle = \int_Q dq |q\rangle \langle q| \Psi \rangle =: \int_Q dq |q\rangle \psi(q) \quad (135)$$

des abstrakten Zustandsvektors  $|\Psi\rangle$  nach Eigenzuständen  $|q\rangle$  des Ortsoperators  $q$ , im Volksmund auch SCHRÖDINGER-Wellenfunktionen genannt.

hat.  $\text{Spur}_V$  deutet an, daß die Summe über die Diagonalelemente der betrachteten Operatoren in Wirklichkeit Integrale über ein endliches Volumen  $V$  sind. Besondere Vorsicht ist geboten, wenn wir die Systemgröße gegen unendlich gehen lassen, das heißt den thermodynamischen Limes durchführen.

Zur Beantwortung der zu Beginn dieses Abschnitts gestellten Frage nach dem quantenmechanischen Pendant des HALL-Effekts eines unendlich ausgedehnten 2-dimensionalen Systems von Elektronen berechnen wir nun den Zeitmittelwert des Erwartungswertes des elektrischen Stroms. Es ist

$$\begin{aligned}
 \overline{\langle \mathbf{j}_{2D}(t) \rangle} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \langle \mathbf{j}_{2D}(t) \rangle_{\beta, \mu} \\
 &= e \cdot \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \text{Spur}_V \{ f(H_L) \} \cdot \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}}{\mathbf{B}^2} \\
 &= e \cdot n_{2D} \cdot \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{E}}{\mathbf{B}^2},
 \end{aligned} \tag{143}$$

was impliziert, daß die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte

$$n_{2D}(\beta, \mu) = \lim_{V \rightarrow \infty} \text{Spur}_V \{ f(H_L) \} \tag{144}$$

eine glatte Funktion in  $\beta$  und  $\mu$  ist.

Fazit: Wir reproduzieren das klassische Resultat. Da es keinen Grund für die Erwartung gibt, daß in einem realen System das chemische Potential  $\mu$  immer zwischen den LANDAU-Niveaus hin- und herspringt, insbesondere von Lückenmitte zu Lückenmitte, schließen wir aus dem Ergebnis, daß mit dem Auffüllen der LANDAU-Niveaus die HALL-Leitfähigkeit *kontinuierlich* steigen müßte. Wir müssen also nach einem *zusätzlichen* Mechanismus suchen, wenn wir eine befriedigende Erklärung des beobachteten Quanteneffektes finden wollen.

Die Untersuchung dieses Problems definiert ein aktuelles Forschungsgebiet. Selbst heute sind noch viele Fragen offen [32], vielleicht aber ist auch das grundlegende Prinzip noch gar nicht verstanden. Bevor man sich im Detail mit diesen Fragen auseinandersetzt, sollte man zunächst die experimentelle Realisierung der zugehörigen physikalischen Systeme verstehen.

### 3 Von der Theorie zur Messung

#### 3.1 Experimentelle Realisierung von 2-dimensionalen Elektronengasen

2-dimensionale Elektronen- oder Löchergase können an Halbleiter-Grenzflächen, so zum Beispiel in einer *Metall-Oxid-Halbleiter-Struktur (MOS)* oder an einer Grenzfläche zwischen Halbleitern verschiedener Bandlücke, einer sogenannten *Heterostruktur*, realisiert werden [4, 63]. Im ersten Fall ist es die extern angelegte Gatespannung, im zweiten Fall die geeignete Dotierung zusammen mit einem Bandlückensprung, die eine Bandverbiegung verursacht, welche zu einem in erster Näherung dreieckförmigen Potentialtopf führt. Durch die endliche Ausdehnung des elektronischen Systems in Richtung der dritten Dimension zeichnen sich die Elektronen (oder Löcher) durch quantisierte Energieniveaus in einer Richtung aus - ganz ähnlich wie im Fall des in den Quantenmechanik-Lehrbüchern diskutierten Kastenpotentials. Im betrachteten Fall des Dreieckpotentials sind die Energie-Eigenfunktionen allerdings AIRY-Funktionen.

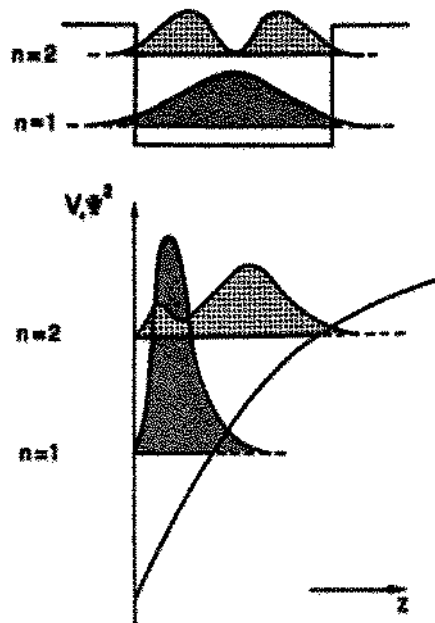
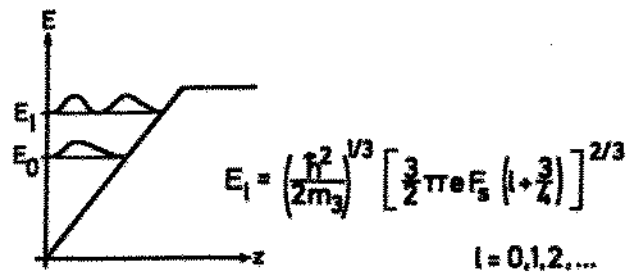


Abbildung 6: Kastenpotential versus Dreieckspotential

Während die Elektronen (oder Löcher) in Richtung der z-Achse durch die dargestellten Randbedingungen eingeschränkt sind, können sie sich in den anderen beiden Richtungen frei bewegen. Somit ist ihr Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$  eine gute Quantenzahl lediglich für die zwei Dimensionen x und y, nicht aber für die dritte, die z-Richtung. Somit erhalten wir eine Reihe von sogenannten *Subbändern*  $0, 1, \dots$  für jeden Energieeigenwert  $E_0, E_1, \dots$ . In der Nähe des absoluten Nullpunktes ist nur das unterste Niveau oder Subband besetzt. Das System wird somit physikalisch *exakt* 2-dimensional.



Für  $m_3 = 0.1 m_0$   
 und  $F_s = 5 \cdot 10^5 \text{ V/cm}$   
 erhält man :

$$E_l = 276.6 \left( l + \frac{3}{4} \right)^{2/3} \text{ meV}$$

$$E_0 = 228.3 \text{ meV}$$

$$E_1 = 401.6 \text{ meV}$$

$$E_2 = 542.8 \text{ meV}$$

Abbildung 7: Energieniveaus im Dreieckspotential

Die diesen Plateaux zugeordneten HALL-Leitfähigkeiten sind quantisiert gemäß

$$\sigma_H = i \cdot \frac{e^2}{h}. \quad (145)$$

Den Plateaux entsprechen Nullstellen in der longitudinalen Leifähigkeit  $\sigma_{xx}$ . Es soll hier nur erwähnt werden, daß spätere Experimente von TSUI, STÖRMER und GOSSARD in Heterostrukturen hoher Elektronenbeweglichkeit unter sehr starken Magnetfeldern sogar



Plateaux zu gebrochenen Werten (hauptsächlich mit ungeradem Nenner) zeigten [66]. Dieser fraktionell-quantisierte HALL-Effekt ist ein Phänomen für sich und soll hier nicht im Detail diskutiert werden [13].

Es muß hervorgehoben werden, daß die Kinematik des HALL-Effektes zusammen mit der LANDAU-Quantisierung die Existenz der Plateaux *nicht* erklärt. Ein zusätzlicher Aspekt muß hinzukommen, nämlich ein physikalischer Mechanismus, aus dem für die HALL-Leitfähigkeit bei kontinuierlicher und gleichmäßiger Erhöhung des Magnetfeldes der Wechsel von Ansteigen und Verharren auf dem quantisierten Wert folgt. Es herrscht Übereinstimmung darin, daß dieser Mechanismus mit der Existenz lokalisierter Elektronenzustände zwischen zwei LANDAU-Niveaus zusammenhängt. Das Auffüllen dieser lokalisierten Zustände verändert den Transport-Koeffizienten nicht. Hierdurch werden die Punkte, für welche die Quantisierungsbedingung erfüllt ist, zu einer plateauförmigen Linie ausgezogen.

Elektronen-Lokalisierung hängt mit Unordnung in kondensierter Materie zusammen: Etwas salopp formuliert, ist der integral-quantisierte HALL-Effekt ein „Dreckeffekt“, das heißt, er benötigt die Präsenz von Streuzentren bzw. Störstellen. In dieser Hinsicht steht er im Gegensatz zum fraktionell-quantisierten HALL-Effekt, der nur in ultra-reinen Proben zu beobachten ist. Die schwierige physikalische Frage besteht nun darin, wie es kommt, daß sich Lokalisierung und Magnetotransport so arrangieren können, daß wir das Phänomen des integral-quantisierten HALL beobachten. Die Genauigkeit der Quantisierung und die Möglichkeit, im Rahmen eines Festkörper-Experiments mittels Bestimmung der sogenannten VON KLITZING-Konstante

$$R_{vK} = \frac{h}{e^2} = 25.812\,805 \dots \text{k}\Omega \quad (146)$$

durch „simple Widerstandsmessungen“ die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{1}{\hbar c} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c e^2}{2\hbar} \quad (147)$$

*unabhängig* von Feinheiten der Probengeometrie bestimmen zu können, deutet auf einen *topologischen Quantisierungsmechanismus* hin - ganz ähnlich der Quantisierung des magnetischen Flusses durch einen supraleitenden Ring [37]. Solche Quantisierungen sind erfahrungsgemäß sehr robust, müßten also zum Beispiel unsensibel gegenüber der Art und Form

der Verunreinigung sein. Interessanterweise scheint aber die *Existenz* der letzteren gerade eine *Voraussetzung* für das Zustandekommen des Effektes zu sein.

Unter Experimentalphysikern und Phänomenologen gilt der quantisierte HALL-Effekt heute als verstanden: Empirisch gesehen weiß man ziemlich genau, was passiert, und kann auch bei komplizierten Probengeometrien und -topologien verlässliche Vorhersagen machen. Der Stand der theoretischen Forschung allerdings ist der, daß es eine vollständig ausgearbeitete und gleichzeitig rigorose Theorie des quantisierten HALL-Effektes im Rahmen der Quantentransporttheorie (der Quantenfeldtheorie des Nichtgleichgewichts) nicht gibt. Strenggenommen gibt es nicht einmal einen Beweis dafür, ob die VON KLITZING-Konstante tatsächlich mit der SOMMERFELDSchen Feinstrukturkonstante (*modulo* einer Umrechnungsvorschrift) gleichzusetzen ist (man denke an Abweichungen von dem Typ eines LAMB-Shifts). Aber es sind gerade die topologischen Argumente, die - im Rahmen fundierter semiphänomenologischer Theorien - darauf hindeuten, daß die VON KLITZING-sche Quantisierungsregel tatsächlich ein fundamentales Naturgesetz darstellt. Die Situation ist vielleicht vergleichbar mit der in der Quantenelektrodynamik: Obwohl die Theorie noch Fehlstellen und Inkonsistenzen beinhaltet, zählt sie zu den erfolgreichsten Konzepten der modernen Physik. Im Literaturverzeichnis ist eine Liste von Fachartikeln und Lehrbüchern über die quantisierten HALL-Effekte zu finden, auf die der interessierte Leser (und vielleicht der zukünftige Forscher auf diesem Gebiet) verwiesen sei.

### 3.2 MOS-(metal-oxide-semiconductor-)Strukturen

Eine MOS-(metal-oxide-semiconductor-)Struktur ist - wie der Name schon andeutet - ein Schichtsystem mit der Abfolge Metall-Siliziumdioxid-Silizium. Letzteres ist entweder eine Si-MOS-Struktur in p-dotierten Bereichen (man spricht auch von *p-Substraten* oder *p-Wannen*) oder in n-dotierten Bereichen (*n-Substraten* oder *n-Wannen*). Die Metallschicht wird als sogenannte Gate-Elektrode verwendet, daß heißt, die an sie angelegte Spannung  $V_G$  bestimmt Bandstruktur und Ladungsträgerverteilung. Die Einstellung der Besetzungsgrenze der Zustände im Metall durch  $V_G$  bestimmt die Verbiegung der Bandstruktur im Silizium.

Bekanntlich unterscheiden wir in dotierten Halbleitern zwischen Majoritätsladungsträgern (das sind diejenigen, welche durch die Dotierung in der Mehrzahl auftreten) und Minoritätsladungsträgern (das sind diejenigen, welche infolge der thermischen Anregung von Elektronen-Loch-Paaren als Minderheit immer vorhanden sind). Beschränken wir uns auf die Betrachtung von p-MOS-Systemen. In diesem Fall sind die Majoritätsladungsträger die Löcher, die Minoritätsladungsträger die Elektronen. Wir unterscheiden drei Fälle:

$V_G < 0$  Die Valenzbandkante  $E_V$  rückt an die FERMI-Energie  $E_F$ , und es ist für die Löcher günstiger, sich nahe der Grenzfläche anzuordnen. Wenn  $E_V > E_F$  wird, entsteht an der Si-SiO<sub>2</sub>-Grenzfläche eine positive Raumladung von Löchern. Dieser Zustand wird Anreicherung (Akku-mulation) genannt. (*Achtung:* Wir dürfen noch einmal daran erinnern, daß wir gerade den Fall eines p-Substrats behandeln.)

$V_G = V_{FB} \approx 0$  Ist  $V_G = 0$ , so verlaufen die Bänder nicht flach, da im Oxid Ladungen eingelagert sind, welche die Bänder verbiegen. Durch eine angelegte Spannung, der sogenannten Flachbandspannung  $V_{FB}$ , kann man diese Verbiegung kompensieren. Wird  $V_G < V_{FB}$ , tritt zunächst Verarmung (Depletion) auf, da es für die Löcher energetisch günstiger ist, sich von der Oberfläche entfernt anzuordnen. ( $V_{FB}$  ist nahe null Volt, daher wird hier  $V_{FB} \approx 0$  angenommen.)

$V_G > 0$  Die Leitungsbandkante  $E_L$  wird unter die FERMI-Energie  $E_F$

gedrückt, und Elektronen aus dem Valenzband fallen in die so entstehende dreieckförmige Potentialtasche und besetzen somit die Zustände nahe der Grenzschicht. Es entsteht ein 2-dimensionales Elektronengas. Der Wert von  $V_G$  bei Einsetzen dieser sogenannten Inversion nennt man Threshold-Spannung  $V_{th}$ .

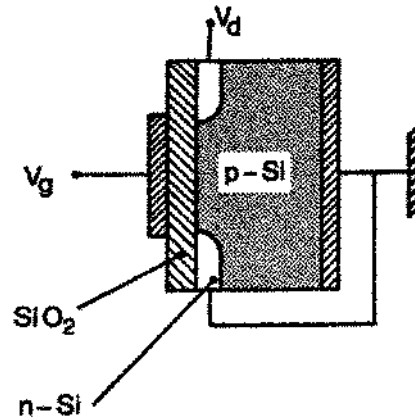


Abbildung 8: p-MOS-Struktur

Für eine Si-MOS-Struktur auf einem n-Substrat gilt entsprechendes; das heißt, die Verhältnisse drehen sich um. Insgesamt haben wir also sechs physikalisch unterschiedliche Fälle zu unterscheiden.

Eine Si-MOS-Struktur kann als Kondensator der Fläche  $A$  und Dicke  $d$  gefüllt mit einem Dielektrikum der Permittivität  $\varepsilon_{\text{SiO}_2}$  aufgefaßt werden, so daß wir für die Kapazität setzen dürfen

$$C = \frac{\varepsilon_{\text{SiO}_2} \varepsilon_0 A}{d}, \quad (148)$$

mit  $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C/Vm}$  und  $\varepsilon_{\text{SiO}_2} = 3.8$ . Für die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$  ergibt sich die sogenannte *Kondensatorformel*

$$n_{2D} = \frac{C}{eA} \cdot (V_G - V_{th}) = \frac{\varepsilon_{\text{SiO}_2} \varepsilon_0}{ed} \cdot (V_G - V_{th}), \quad (149)$$

die insbesondere im Falle der Inversion von Bedeutung ist.

Silizium ist ein indirekter Halbleiter: Das absolute Minimum der Leitungsbandkante liegt nicht bei  $\mathbf{k} = 0$  sondern bei endlichen  $\mathbf{k}$ -Werten. In [100]-Oberflächenorientierung haben wir zwei Täler (engl. *valleys*), die - obwohl im  $\mathbf{k}$ -Raum nicht wegzusammenhängend - energetisch äquivalent sind. Somit sind die energetischen Zustände in [100]-oberflächenorientiertem Silizium zweifach entartet. So ergibt sich für die Entartung eines Landauniveaus für [100]-Silizium

$$n_L = g_s g_v \cdot \frac{eB}{h} = 4 \cdot \frac{eB}{h} \quad (150)$$

mit

$$g_s = 2 \quad (151)$$

als Spinentartungsfaktor und

$$g_v = 2 \quad (152)$$

als Valleyentartungsfaktor. Die Valleyentartung wird nur in sehr starken Magnetfeldern meßbar aufgehoben.

### 3.3 Heterostrukturen

Eine Heterostruktur ist ein Schichtsystem aus verschiedenen Materialien (griech. *heteros* = verschieden), hier aus Halbleitern verschiedener Bandstruktur. Heterostrukturen werden realisiert durch Molekularstrahlepitaxie, einem programmgesteuerten Präzisionsverfahren für das Wachstum wohldefinierter Kristalle [28]. Die gemeinsame Verwendung von Galliumarsenid und Aluminium-Gallium-Arsenid ermöglicht die Kombination von Halbleitern verschiedener Bandlücke bei gleicher Gitterkonstante, mit anderen Worten: ein Aufwachsen von verschiedenen Schichten ohne Fehlanpassung (engl. *mismatch*).

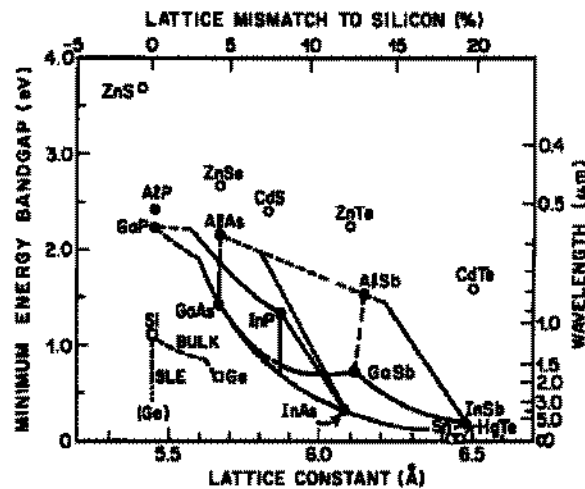


Abbildung 9: Bandlücken versus Gitterkonstanten von III-V-Halbleitern

Eine typische  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs-Heterostruktur sieht wie folgt aus: Auf einem semi-isolierenden Substrat aus Galliumarsenid werden nacheinander aufgewachsen

1.  $1 - 4 \mu\text{m}$  GaAs,
2.  $10 - 40 \text{ nm}$  undotiertes  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  (der sogenannte *Spacer*),
3.  $20 - 50 \text{ nm}$  Si-(n-)dotiertes  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ,
4.  $10 - 20 \text{ nm}$  GaAs (die sogenannte *Cap*).

Im thermischen Gleichgewicht muß die FERMI-Energie  $E_F$  über die verschiedenen Grenzflächen hinweg konstant sein. Die Erfüllung dieser Bedingung erzwingt die Verbiegung der Leitungsbandkante zur Grenzfläche hin. Der energetische Unterschied der Bandlücken von GaAs und  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  ist so groß, daß die Leitungsbandkante des GaAs-Puffers an der  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs-Grenzfläche bis unter die FERMI-Energie  $E_F$  gedrückt wird. Dort bildet sich ein näherungsweise dreieckförmiges Potential unterhalb von  $E_F$  aus, welches vergleichbar ist mit dem oben beschriebenen Potentialverlauf in MOS-Inversionsschichten. Somit besetzen die Elektronen nahe an der  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs-Grenzfläche Zustände im Leitungsband und bilden durch ihre Beweglichkeit in x- und y-Richtung eine leitfähige Schicht, das 2-dimensionale Elektronengas.

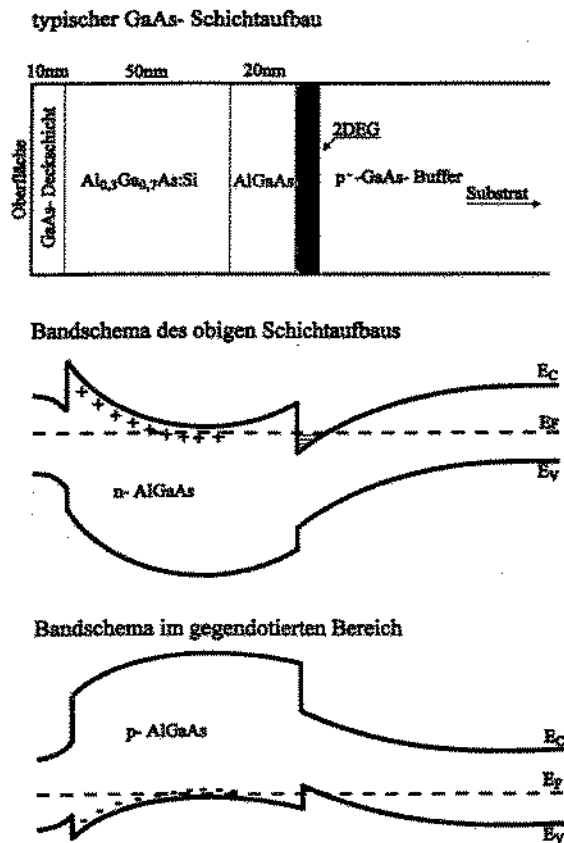


Abbildung 10: Heterostruktur

Die Beweglichkeit der Elektronen wird durch die Streueffekte im Kristall eingeschränkt. Der Spacer wird eingefügt, um die Elektronen in der Grenzschicht möglichst weit von den ionisierten Donatoratomen (hier Silizium als IV-Element auf IIIer-Plätzen) in der dotierten  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -GaAs-Schicht zu trennen.

Da Galliumarsenid ein direkter Halbleiter ist, gibt es hier keine Valleyentartung; die FERMI-Fläche ist die Oberfläche einer Kugel.



### 3.4 Vom 2-dimensionalen zum 3-dimensionalen Elektronengas: Subbänder

Der HAMILTON-Operator eines quantenmechanischen Systems freier Elektronen in drei Raumdimensionen besitzt ein nach unten beschränktes und nach oben unbeschränktes kontinuierliches Spektrum. Die Energieeigenwerte lassen sich als quadratische Funktion des kontinuierlichen Wellenzahlvektors  $\mathbf{k}$  auffassen und haben die Form

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_x^2 + \hbar^2 k_y^2 + \hbar^2 k_z^2}{2m}. \quad (153)$$

Ist die Bewegung in eine der drei Raumrichtungen (üblicherweise die z-Richtung) eingeschränkt, so wird das Spektrum der zugeordneten Komponente des Wellenzahlvektors (z. B.  $k_z$ ) diskret. Im Idealfall wird eine solche Einschränkung durch das Potential eines Kastens mit unendlich hohen Wänden definiert. Die Betrachtung der realistischen Situation eines Potentials mit näherungsweise dreieckförmigen Verlauf unterscheidet sich davon qualitativ nicht, wohl aber quantitativ, das heißt, hinsichtlich der Abstände der Energieniveaus und der Ausdehnung der Wellenfunktionen. Auf jeden Fall können wir schreiben

$$E^j(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2 k_x^2 + \hbar^2 k_y^2}{2m} + E_z^j. \quad (154)$$

Bei Diskretisierung einer Raumdimension also zerfällt der Raum der Energieeigenwerte des 3-dimensionalen Systems in eine diskrete Summe von Unterräumen von Energie-Eigenwerten, die zu einem idealisierten 2-dimensionalen System gehören.

Nun haben wir in einem 3-dimensionalen Festkörper infolge der Gitterperiodizität nach dem Theorem von BLOCH nicht einfach ein nach unten beschränktes und nach oben unbeschränktes Energiekontinuum, sondern Energiebänder vorliegen. Durch die Einschränkung einer Raumdimension zerfallen diese somit in eine abzählbare Menge 2-dimensionaler Unterbänder, sogenannter Subbänder. Für kleine Wellenzahlen gilt

$$E^j(k_x, k_y) = \frac{\hbar^2 k_x^2 + \hbar^2 k_y^2}{2m} + E_z^j, \quad (155)$$

wobei

$$m = 0.067 m_e \quad (156)$$

die hier in der freien Elektronenmasse  $m_e$  ausgedrückte effektive Masse des Elektrons in Galliumarsenid ist.

Wenn man die Stärke der Dotierung in  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  so wählt, daß die Anzahl der Elektronen in der Grenzsicht nur zur Besetzung des untersten Subbandes  $j = 0$  ausreicht, können wir davon ausgehen, daß im Limes verschwindender Temperatur tatsächlich nur das unterste Subband besetzt ist. Zwar hat das betrachtete physikalische System noch eine Ausdehnung in  $z$ -Richtung, aber es besteht keine kinematische Freiheit in dieser Richtung mehr; das System verhält sich, „wie wenn es“ (lat. *quasi*) exakt 2-dimensional wäre: Wir sprechen daher auch von einem quasi-2-dimensionalen Elektronengas.

Erlauben wir uns an dieser Stelle einen kleinen Exkurs und berechnen die Zustandsdichte für ein Elektronengas in  $n$  Raumdimensionen. Das Volumen einer  $n$ -dimensionalen Kugel oder  $n$ -Disk  $\mathbf{D}^n$  mit Radius  $r$  ist bekanntlich gegeben durch

$$\text{Vol}(\mathbf{D}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n. \quad (157)$$

Wir erinnern daran, daß die  $\Gamma$ -Funktion die Eigenschaften

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (158)$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \quad (159)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad (160)$$

erfüllt. Insbesondere ist

$$\text{Vol}(\mathbf{D}^3) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3, \quad (161)$$

$$\text{Vol}(\mathbf{D}^2) = \pi \cdot r^2, \quad (162)$$

$$\text{Vol}(\mathbf{D}^1) = 2 \cdot r. \quad (163)$$

Damit erhalten wir für eine  $n = 3, 2, 1$ -dimensionale FERMI-Kugel

$$\text{Vol}(\mathbf{D}_F^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi k_F^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{(2mE_F)^{3/2}}{\hbar^3}, \quad (164)$$

$$\text{Vol}(\mathbf{D}_F^2) = \pi k_F^2 = \pi \cdot \frac{2mE_F}{\hbar^2}, \quad (165)$$

$$\text{Vol}(\mathbf{D}_F^1) = 2k_F = \frac{2(2mE_F)^{1/2}}{\hbar}. \quad (166)$$

In einem spin- und valleyentarteten  $n$ -dimensionalen System (mit einem würfelförmigen Volumen der Kantenlänge  $L$ ) ist die Gesamtzahl der erlaubten Zustände<sup>13</sup> gegeben durch

$$n_{nD}(E_F) = g_s g_v \cdot \frac{\text{Vol}(\mathbf{D}_F^n)}{(2\pi/L)^n}, \quad (167)$$

wobei wir einen Faktor  $L^n$  unterdrücken, wenn wir uns - wie üblich - auf ein Einheitsvolumen beziehen wollen. Für die Herleitung dieser für die Festkörperphysik fundamentalen Formel sei der Leser zum Beispiel auf das Lehrbuch von KITTEL verwiesen [41].

Für die Zustandsdichten in  $n = 3, 2, 1$  Raumdimensionen erhalten wir somit

$$D_{3D}(E) = \frac{dn_{3D}(E)}{dE} = g_s g_v \cdot \frac{4\pi m \sqrt{2mE}}{h^3}, \quad (168)$$

$$D_{2D}(E) = \frac{dn_{2D}(E)}{dE} = g_s g_v \cdot \frac{2\pi m}{h^2}, \quad (169)$$

$$D_{1D}(E) = \frac{dn_{1D}(E)}{dE} = g_s g_v \cdot \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}}, \quad (170)$$

wobei wir für  $n=3$  einfach  $E=E_F$  setzen, in den niederdimensionalen Fällen  $n=2, 1$  dagegen

$$E = E_F - E_z^j \quad (171)$$

für ein Subband  $j$ .

Wir erinnern noch einmal daran, daß wir für den Spinentartungsfaktor

$$g_s = 2 \quad (172)$$

setzen. Der Valleyentartungsfaktor  $g_v$  ist nur für indirekte Halbleiter wie Silizium von Bedeutung. Für Galliumarsenid setzen wir diesen Faktor gleich 1.

---

<sup>13</sup>Man beachte, daß diese Formel von verschwindenden bzw. periodischen Randbedingungen für die Wellenfunktionen ausgeht [41].

Damit sei unserer Exkurs über die Zustandsdichte in  $n$  Dimensionen beendet.- Wesentlich ist die Beobachtung, daß die Subband-Zustandsdichte in zwei Raumdimensionen konstant ist (!). Für die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte erhalten wir im Falle der Besetzung des untersten Subbandes:

$$n_{2D} = \int_{E_z^0}^{E_F} D_{2D}(E) dE = g_s g_v \cdot \frac{2\pi m}{h^2} \cdot E, \quad (173)$$

mit  $E = E_F - E_z^0$ .

### 3.5 2-dimensionales Elektronengas im Magnetfeld

Wir betrachten nun den Fall, in dem ein Magnetfeld senkrecht zur Grenzfläche, an der sich das 2-dimensionale Elektronengas ausgebildet hat, angelegt ist. Diese Anordnung wird auch FARADAY-Geometrie genannt (im Gegensatz zur VOGT-Geometrie  $B \parallel$  Fläche).

Die klassische Kinematik folgt aus der Bedingung, daß sich LORENTZ-Kraft und Zentralkraft die Waage halten müssen. Dies ist genau dann der Fall, wenn sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit der *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \quad (174)$$

bewegen. Die Projektion einer solchen Bewegung entspricht der eines harmonischen Oszillators. Es ist daher naheliegend zu vermuten, daß die quantenmechanische Behandlung der vorliegenden Situation zu einer Quantisierungsregel führt, welche an die quantenmechanische Behandlung des harmonischen Oszillators erinnert. In der Tat zeigt man durch Lösen der zugeordneten SCHRÖDINGER-Gleichung, daß die Elektronen quantisierte Energieeigenwerte mit dem Abstand  $\hbar\omega_c$  einnehmen, die sogenannten LANDAU-Niveaus [44]. Für die Gesamtenergie der Elektronen erhält man

$$E_n^j = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) + E_z^j, \quad (175)$$

mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Da sich die Elektronen nur noch auf LANDAU-Niveaus aufhalten dürfen, ist die Zustandsdichte nicht mehr gleichmäßig auf die Energien bis hin zu  $E_F$  verteilt, sondern kondensiert in gleichmäßiger Weise auf den Werten der LANDAU-Niveaus. Für die Anzahl der Zustände auf einem LANDAU-Niveau, dem sogenannten *Entartungsgrad*, erhalten wir

$$n_L = \int_{E_n^j - \frac{1}{2}\hbar\omega_c}^{E_n^j + \frac{1}{2}\hbar\omega_c} D_{2D}(E) dE = g_s g_v \cdot \frac{2\pi m}{h^2} \cdot \hbar\omega_c = g_s g_v \cdot \frac{eB}{h}. \quad (176)$$

Der beschriebene Typ von Entartung kann auch als Drehimpulsentartung aufgefaßt werden. Die Anzahl gefüllter LANDAU-Niveaus berechnet sich aus der Anzahl  $n_{2D}$  der Ladungsträger pro Einheitsfläche bezogen auf den Entartungsgrad  $n_L$  eines LANDAU-Niveaus:

$$\text{Anzahl der gefüllten LANDAU-Niveaus} = \frac{n_{2D}}{n_L} = \frac{1}{g_s g_v} \cdot \frac{\hbar n_{2D}}{eB} =: \frac{1}{g_s g_v} \cdot \nu. \quad (177)$$

Der Füllfaktor  $\nu$  gibt die Anzahl gefüllter spin- und valley-aufgespalteter Niveaus an. Die vollständige Füllung eines LANDAU-Niveaus entspricht also einem Füllfaktor von zum Beispiel  $\nu = 4$  in Silizium und einem Füllfaktor von  $\nu = 2$  in Galliumarsenid.

Beziehen wir die ZEEMANN-Aufspaltung der Elektronen im Magnetfeld mit ein, so erhalten wir für die Gesamtenergie der Elektronen eines 2-dimensionalen Elektronengases im Magnetfeld:

$$E_{n,s}^j = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) + g^*\mu_B B \cdot b + E_z^j, \quad (178)$$

mit  $s = \pm 1/2$  und  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Durch Streuprozesse an Verunreinigungen und Defekten im Kristall werden die im Idealfall scharf definierten LANDAU-Niveaus verbreitert. Diese Verbreiterung spielt eine bedeutende Rolle im Verständnis des quantisierten HALL-Effektes.

*Bemerkung:* Auch wenn wir von falschen Randbedingungen für die Wellenfunktionen ausgegangen sind, erhalten wir das richtige Ergebnis für die Entartung eines LANDAU-Niveaus. Die Übereinstimmung erklärt sich aus der Tatsache, daß sich die FERMI-Energie bzw. das chemische Potential beim Einschalten des Magnetfeldes nicht ändert. Durch Vergleich mit der oben vorgestellten eichinvarianten Formulierung haben wir dies hiermit sogar bewiesen.

### 3.6 Drude-Modell für den klassischen Hall-Effekt

In der Einleitung haben wir den klassischen HALL-Effekt im Einteilchen-Bild hergeleitet. Im folgenden wollen wir die Herleitung im Rahmen des DRUDE-Bildes wiederholen. Der Vorteil dieses Rahmens besteht darin, daß er mikroskopische Größen wie die Relaxationszeit zwischen zwei Stößen in Relation zu den makroskopischen Größen wie spezifische Leitfähigkeit und spezifischen Widerstand setzt.

An dieser Stelle ist es nützlich, die grundlegenden Annahmen des DRUDE-Modells zu rekapitulieren:

1. Elektronen bewegen sich als freie Teilchen, wenn wir von den Stößen mit den als harte Kerne dargestellten Ionen (engl. *hard core ions*) absehen. Sowohl die Elektron-Elektron-Wechselwirkung zwischen den Stößen wird vernachlässigt (engl. *independent electron approximation*), als auch die Elektron-Ion-Wechselwirkung (engl. *free electron approximation*).
2. Ohne irgendwelche Annahmen über den detaillierten Mechanismus der Streuprozesse zu machen, wird die Arbeitshypothese aufgestellt, daß die Elektronen von Zeit zu Zeit an den *hard core ions* streuen. Durch einen derartigen Streuprozess ändert sich die Impulsrichtung eines gestreuten Elektrons. Die Streuung kann als elastisch angenommen werden.
3. Die Wahrscheinlichkeit einer Streuung bzw. die Änderung der Impulsrichtung eines Elektrons wird durch den Kehrwert einer Beruhigungszeit, der sogenannten DRUDE-Impulsrelaxationszeit  $\tau$ , quantifiziert.
4. Es wird angenommen, daß die Elektronen das thermische Gleichgewicht (in Bezug auf ihre Umgebung) ausschließlich durch die beschriebenen Streuprozesse erreichen.

Eine kritische Würdigung der DRUDE-Theorie führt unmittelbar zu fundamentalen noch offenen Grundlagenfragen der Thermodynamik (mikroskopische Reversibilität versus makroskopische Irreversibilität, BOLTZMANN versus GIBBS, Meßprozeß usw.). Eine Einbeziehung der Quantenkinematik zeigt, daß sogar die weiterführende BOLTZMANNsche Trans-

porttheorie für die vollständige Beschreibung der Phänomene, die für uns von Interesse sind, unzureichend ist.

Im folgenden soll lediglich plausibel gemacht werden, daß die DRUDE-Theorie für die dynamischen Gleichungen der makroskopischen Transportgrößen Reibungsterme liefert. Ein wesentlicher Punkt ist, daß die Streuung im DRUDE-Bild zwar als elastisch angenommen werden darf, daß sie aber aus Sicht der Quantenmechanik als inkohärent betrachtet werden muß und daher schon ein Element der Irreversibilität (Entropiezunahme) auf mikroskopischer (oder sollten wir sagen mesoskopischer?) Ebene einführt. Daher ist es nicht verwunderlich, daß sich die makroskopische Beschreibung auf eine effektive dissipative Kinetik/Dynamik reduziert.

Es ist nützlich, sich eine Analogie zwischen der klassisch-mechanischen Dynamik und der Dynamik des elektrischen Transports zu vergegenwärtigen. Das NEWTONsche Gesetz

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (\text{falls } m = \text{const.}) \quad (179)$$

setzt die auf einen Körper ausgeübte Kraft  $\mathbf{F}$  in Beziehung zu seiner Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}$  und steht zum Reibungsgesetz

$$\mathbf{F} = \kappa \mathbf{v} \quad (180)$$

in genau derselben Relation wie die einen idealen Leiter beschreibende 2. LONDONSche Gleichung

$$\mathbf{E} = \text{const} \frac{d\mathbf{j}_{2D}}{dt} \quad (181)$$

zum OHMSchen Gesetz

$$\mathbf{E} = \varrho \mathbf{j}_{2D}. \quad (182)$$

*Bemerkung:* Die 2. Londonsche Gleichung wird zuweilen auch Beschleunigungsgleichung genannt. Sie beschreibt einen idealen Leiter. Um das Phänomen der Supraleitung zu beschreiben (ideale Leitfähigkeit bei Verdrängung des Magnetfeldes) reicht sie allein nicht aus!

Heben wir noch einmal den wesentlichen Punkt hervor: In einem realen Leiter bewegen sich die Elektronen von Stoß zu Stoß ballistisch, werden also auf der dazwischen liegenden Strecke beschleunigt. Die mittlere Zeit dieser freien Bewegung ist die DRUDE-Impulsrelaxationszeit  $\tau$ . Übrigens ist sie theoretisch sehr schwer zu bestimmen.



Angenommen, ein Elektron hätte nach einem Stoß gerade die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  (fettgeschriebene Buchstaben stehen für Vektoren!), so beschleunigt das äußere stromtreibende Feld  $\mathbf{E}$  dieses bis zum nächsten Stoß von  $\mathbf{v}_0$  auf  $\mathbf{v}_0 - (e\mathbf{E}/m)t$ , wobei  $t$  die verstrichene Zeit bezeichnet. Wenn wir annehmen, daß alle möglichen  $\mathbf{v}_0$  in etwa genauso häufig vorkommen, so erhalten wir für die mittlere Driftgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{mean} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m}, \quad (183)$$

mit  $\tau$  als Zeitmittel und für die makroskopische Stromdichte in dem uns hier interessierenden Fall von zwei Raumdimensionen

$$\mathbf{j}_{2D} = -n_{2D}e\mathbf{v}_{mean} = \left(\frac{n_{2D}e^2\tau}{m}\right) \mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}, \quad (184)$$

wobei  $n_{2D}$  - wie oben - die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte bezeichnet.

*Bemerkung:* Den Quotienten aus dem Betrag der mittleren Driftgeschwindigkeit und dem Betrag der angelegten elektrischen Feldstärke

$$\mu = \frac{|\mathbf{v}_{mean}|}{|\mathbf{E}|} = \frac{1}{e} \cdot \frac{\sigma}{n_{2D}} = \frac{e\tau}{m} \quad (185)$$

nennen wir *Beweglichkeit* oder *Mobilität*.

Die im OHmschen Gesetz

$$\mathbf{j}_{2D} = \sigma\mathbf{E} \quad (186)$$

durch die DRUDE-Impulsrelaxationszeit ausgedrückte Größe

$$\sigma_0 = \frac{n_{2D}e^2\tau}{m} \quad (187)$$

nennen wir die DRUDE-Leitfähigkeit.

Mit anderen Worten: Messen wir im Experiment die spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  bzw. den spezifischen Widerstand  $\varrho$ , so können wir bei Kenntnis der Ladungsträgerdichte die DRUDE-Impulsrelaxationszeit  $\tau$  bestimmen.

Die Analogie zwischen dissipativer Mechanik und Transporttheorie wird noch sichtbarer, wenn wir die NEWTON-Gleichung mit Stoßterm herleiten. Schreiben wir das NEWTONsche Gesetz als

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t), \quad (188)$$

so erhalten wir für die Impulsänderung

$$d\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}(t)dt, \quad (189)$$

was sich in endlicher Näherung liest als

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t) \approx \mathbf{f}(t)\Delta t \quad (190)$$

bzw. als

$$\mathbf{p}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)\Delta t + O(\Delta t^2). \quad (191)$$

Offensichtlich ist die Kollisionswahrscheinlichkeit  $\Delta t/\tau$ , die Wahrscheinlichkeit für das dazu komplementäre Verhalten, das „NEWTON-Verhalten“, gerade  $1 - \Delta t/\tau$ . Letzteren Term führen wir als Gewichtungsfaktor in die Abschätzung für den inkrementierten Impuls ein, so daß wir setzen dürfen

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t + \Delta t) &= \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) (\mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)\Delta t + O(\Delta t^2)) \\ &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{f}(t)\Delta t - \frac{\Delta t}{\tau}\mathbf{p}(t) + O(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (192)$$

Für das Impuls-Inkrement erhalten wir somit

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(t + \Delta t) - \mathbf{p}(t) = \Delta t \left( \mathbf{f}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau} \right) + O(\Delta t^2), \quad (193)$$

so daß die NEWTON-Gleichung mit Stoßterm die folgende Form haben muß:

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t) - \frac{\mathbf{p}(t)}{\tau}. \quad (194)$$

Beschreibt  $\mathbf{f}$  die LORENTZ-Kraft, so wird die obige Gleichung zu

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\mathbf{p}}{\tau}. \quad (195)$$

Ein stationärer Zustand stellt sich ein, wenn die linke Seite dieser Gleichung verschwindet, das heißt, es ist in Komponenten geschrieben

$$\begin{aligned} 0 &= eE_x + \omega_c p_y - \frac{p_x}{\tau}, \\ 0 &= eE_y - \omega_c p_x - \frac{p_y}{\tau}, \end{aligned} \quad (196)$$

mit der *Zyklotronfrequenz*

$$\omega_c = eB/m. \quad (197)$$

Multiplikation mit  $n_{2D}e\tau/m$  und umarrangieren der Summanden ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_0 E_x &:= \left( \frac{n_{2D}e^2\tau}{m} \right) E_x = -\omega_c\tau j_y + j_x, \\ \sigma_0 E_y &:= \left( \frac{n_{2D}e^2\tau}{m} \right) E_y = \omega_c\tau j_x + j_y, \end{aligned} \quad (198)$$

wobei  $\sigma_0$  die DRUDE-Leitfähigkeit für  $B \equiv 0$  bezeichnet. Unter der Bedingung, daß kein transversaler Strom  $\mathbf{j}_{2D,y}$  fließt, erhalten wir für das HALL-Feld

$$E_y = \left( \frac{\omega_c\tau}{\sigma_0} \right) j_x = \left( \frac{B}{n_{2D}e} \right) j_x. \quad (199)$$

Für den nicht-diagonalen Anteil des spezifischen Widerstandes erhalten wir somit

$$\varrho_{yx} = \frac{E_{y,H}}{j_x} = \frac{B}{n_{2D}e}. \quad (200)$$

Es ist nützlich, das OHM-HALL-Gesetz in einer Matrix- bzw. Tensor-Schreibweise zu notieren:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho_{xx} & \varrho_{xy} \\ \varrho_{yx} & \varrho_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}, \quad (201)$$

explizit geschrieben als

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{n_{2D}e^2\tau} & -\frac{B}{n_{2D}e} \\ \frac{B}{n_{2D}e} & \frac{m}{n_{2D}e^2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \sigma_0^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}. \quad (202)$$

*Klassisch* (und nur klassisch!) gilt also

$$\frac{d\varrho_{yx}}{dB} = \frac{1}{n_{2D}e} = \frac{e\tau}{m} \cdot \frac{m}{n_{2D}e^2\tau} = \mu\varrho_{xx}, \quad (203)$$

kompakt geschrieben als

$$\frac{d\varrho_{yx}}{dB} = \mu\varrho_{xx} \quad (\text{klassisch}). \quad (204)$$

Der HALL-Konstante  $R_{Hall}$  ist *per definitionem* der auf das Magnetfeld  $B$  normierte nicht-diagonale Anteil des spezifischen Widerstandes:

$$R_{Hall} := \frac{R_H}{B} = \frac{1}{B} \cdot \frac{U_y}{I_x} = \frac{1}{B} \cdot \frac{E_y}{j_{2D,x}} = \frac{1}{B} \cdot \varrho_{yx}. \quad (205)$$

*Bemerkung:* Beachte, daß  $R_{Hall}$  eine andere Einheit hat als  $\varrho_{yx}$ .

*Bemerkung:* Beachte ferner, daß der spezifische Widerstand sich aus dem absoluten Widerstand der Probe in drei Dimensionen anders berechnet als in zwei Dimensionen. Im ersteren Fall haben wir ihre Dicke zu berücksichtigen, im zweiten Fall nicht. Seien die Abmessungen der Probe in drei Dimensionen  $L_x \cdot L_y \cdot L_z$ , in zwei Dimensionen  $L_x \cdot L_y$ , dann sind die HALL-Widerstände

$$R_{Hall} = \frac{R_H}{B} = \frac{1}{B} \cdot \frac{U_y}{I_x} = \frac{1}{B} \cdot \frac{E_y \cdot L_y}{j_{2D,x} \cdot L_y} = \frac{1}{B} \cdot \frac{E_y}{j_{2D,x}} \quad (206)$$

bzw.

$$R_{Hall} = \frac{R_H}{B} = \frac{1}{B} \cdot \frac{U_y}{I_x} = \frac{1}{B} \cdot \frac{U_y \cdot L_z}{I_x} = \frac{1}{B} \cdot \frac{E_y \cdot L_y}{j_{3D,x} \cdot L_y \cdot L_z} = \frac{1}{B} \cdot \frac{E_y}{j_{3D,x} \cdot L_z}, \quad (207)$$

wobei im 2D-Fall  $j_{2D,x}$  eine Stromdichte bezogen auf einen linienförmigen Querschnitt bezeichnet, im 3D-Fall  $j_{3D,x}$  eine Stromdichte bezogen auf einen flächenförmigen Querschnitt bezeichnet.

Die Inversion

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (208)$$

des OHM-HALL-Gesetzes folgt aus elementarer Matrixalgebra. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\varrho_{xx}}{\varrho_{xx}^2 + \varrho_{xy}^2} = \sigma_0 \frac{1}{1 + \omega_c^2 \tau^2}, \\ \sigma_{xy} &= \frac{-\varrho_{xy}}{\varrho_{xx}^2 + \varrho_{xy}^2} = \sigma_0 \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (209)$$

Im Limes großer Magnetfelder und damit großer HALL-Spannungen wird  $E_y \gg E_x$  und  $\varrho_{yx} \gg \varrho_{xx}$ . Wir erhalten für die Komponenten der Leitfähigkeiten die Näherungen

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &\approx \frac{\varrho_{xx}}{\varrho_{xy}^2}, \\ \sigma_{xy} &\approx -\frac{1}{\varrho_{xy}}. \end{aligned} \quad (210)$$

Es ist also möglich, daß man gleichzeitig

$$\sigma_{xx} = 0, \quad (211)$$

$$\varrho_{xx} = 0, \quad (212)$$

im Gegensatz zu jeglicher Intuition.

### 3.7 Beobachtung des quantisierten Hall-Effekts

Im klassischen Regime erhalten wir somit die folgenden Plots:

1.  $\varrho_{yx}$  versus  $B$ : linear-monoton ansteigend;
2.  $\varrho_{xx}$  versus  $B$ : konstant;
3.  $\varrho_{yx}$  versus  $n_{2D}$ : hyperbolisch abfallend;
4.  $\varrho_{xx}$  versus  $n_{2D}$ : hyperbolisch abfallend.

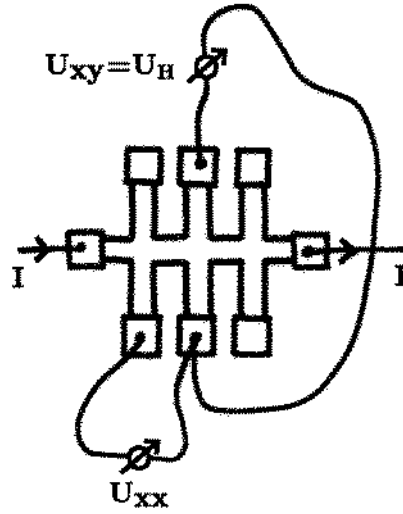


Abbildung 11: QHE-Messung (schematisch)

Im Rahmen der Tieftemperatur-Transportexperimente am 2-dimensionalen Elektronengas beobachten wir hingegen für

1.  $\varrho_{yx}$  versus  $B$  eine vorübergehend ansteigende Funktion mit breiten sogenannten HALL-Plateaux bei den Werten

$$\varrho_{yx} = \frac{B}{e n_{2D}} = \frac{B}{e} \cdot \frac{h}{\nu e B} = \frac{h}{\nu e^2}, \quad (213)$$

mit  $\nu = g_s g_v \cdot i$  und  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Sie stehen in Korrespondenz zur Bedingung

$$n_{2D} = \frac{\nu e B}{h}, \quad (214)$$

mit  $n_{2D}$  als 2-dimensionale Ladungsträgerdichte.

Diese Bedingung beschreibt  $\nu$  vollständig gefüllte LANDAU-Niveaus. Bei hohen Magnetfeldern wird die Spinentartung ( $g_s=2$ ) und bei sehr hohen Magnetfeldern die Valleyentartung (im Falle von Halbleitern mit Valleys) aufgehoben. Bei vollständiger Aufhebung aller Entartungen entspricht der Füllfaktor  $\nu$  der ganzen Zahl  $i$ ;

2.  $\varrho_{xx}$  versus  $B$  bei steigendem  $B$  eine zunächst konstante bis leicht abfallende Funktion, die bei mittleren Magnetfeldern Oszillationen, sogenannte SHUBNIKOV-DE HAAS-Oszillationen zeigt, deren Amplitude mit zunehmenden Magnetfeld anwächst, bis sie schließlich bei den Magnetfeldern, bei denen  $\varrho_{yx}$  Plateaux zeigt, identisch verschwindet;

3.  $\varrho_{yx}$  versus  $n_{2D}$  eine vorübergehend abfallende Funktion mit Plateaux bei den Werten

$$\varrho_{yx} = \frac{B}{e n_{2D}} = \frac{B}{e} \cdot \frac{h}{\nu e B} = \frac{h}{\nu e^2}, \quad (215)$$

mit  $\nu = g_s g_v \cdot i$  und  $i = 1, 2, 3 \dots$ ;

4.  $\varrho_{xx}$  versus  $n_{2D}$  eine Funktion, die Ihre endlichen Werte lediglich bei den Magnetfeldern hat, an denen  $\varrho_{yx}$  seinen Wert ändert, dagegen bei den Magnetfeldern verschwindet, an welchen letztere ihre Plateaux besitzt.

Für die Leitfähigkeiten  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{xy}$  gelten die entsprechenden Ergebnisse.

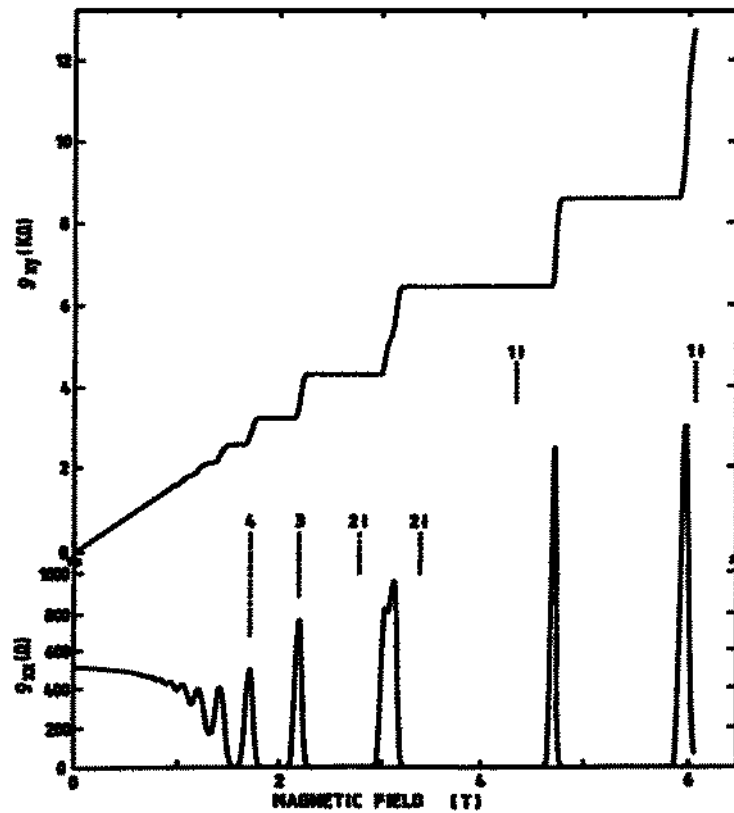


Abbildung 12: QHE versus Magnetfeld (typische Meßkurve)

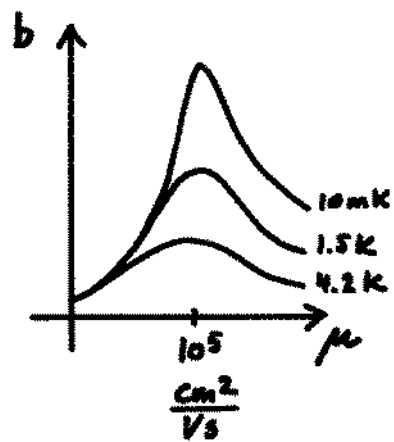


Abbildung 13: Breite der QHE-Plateaux vs. Beweglichkeit (schematisch)

### 3.8 Das chemische Potential

In der Physik der Halbleiter werden häufig die Begriffe „FERMI-Energie“ und „chemisches Potential“ durcheinandergebracht. Wir heben daher an dieser Stelle hervor [7]:

- Die FERMI-Energie oder das FERMI-Niveau  $E_F$  (engl. *Fermi level*) ist *per definitionem* die Energie, welche die besetzten von den unbesetzten Einteilchen-Zuständen trennt.
- Das chemische Potential  $\mu$  ist die freie Energie pro Teilchenzahl. Dabei setzen wir stillschweigend voraus, daß die Teilchenzahl eine ladungsartige, erhaltene Größe ist.<sup>14</sup> Es ist also eine thermodynamische Größe, die zum Beispiel in Analogie zum elektrischen Potential (Energie pro Ladung) gesehen werden kann. (Man vergegenwärtige sich, daß die freie Energie die um den Summanden  $TS$  (mit  $S$  als Entropie) verminderte Energie eines makroskopischen Systems ist.)

Betrachten wir zunächst ein Metall. Wir werden dann die Frage stellen, wie sich die Konzepte auf den Fall des Halbleiters übertragen.

Bei einem Metall fallen FERMI-Niveau und chemisches Potential am absoluten Nullpunkt der Temperaturskala zusammen. Die Verteilungsfunktion ist eine Stufen-Funktion, die an der Stelle  $E = \mu$  auf Null abfällt. Bei endlichen Temperaturen  $T > 0$  wird diese Stufe abgerundet, da einige Elektronen unterhalb von  $\mu$  auf Niveaus oberhalb von  $\mu$  thermisch angeregt sind. Häufig bezeichnet man auch den Wert des chemischen Potentials am absoluten Nullpunkt als FERMI-Energie, also

$$E_F := \mu|_{T=0} . \quad (216)$$

Man beachte, daß dies eine andere Definition der FERMI-Energie ist als die oben vorgestellte. Durch die Verwendung verschiedener Konventionen kann es leicht zu Verwechslungen kommen, zumal sich das chemische Potential  $\mu$  (und natürlich auch die FERMI-Energie - im eigentlichen Sinne definiert als die Grenze zwischen besetzten und unbesetzten Einteilchen-Zuständen) in Abhängigkeit von der Temperatur ändert.

---

<sup>14</sup>Photonen z. B. tragen *keine* ladungsartige Quantenzahl und haben somit *kein* chemisches Potential.



Die Angelegenheit wird komplexer, wenn wir Systeme kondensierter Materie mit Energielücke (engl. *gap*) betrachten. Sind zum Beispiel alle Zustände unterhalb des Gaps besetzt und oberhalb des Gaps unbesetzt (wie bei einem sogenannten intrinsischen Halbleiter, z.B. ideal reinem Silizium am absoluten Nullpunkt), so erfüllt *jedes* Energieniveau in der Energielücke die Definition einer FERMI-Energie im eigentlichen Sinne (!). Wenn Halbleiterphysiker von „der“ FERMI-Energie eines intrinsischen Halbleiter sprechen, meinen sie das chemische Potential, welches für endliche Temperaturen wohldefiniert ist und im Limes verschwindender absoluter Temperatur sich bei undotierten Halbleitern in der Mitte des Gaps befindet.

Auch wir wollen zuweilen dem allgemeinen Sprachgebrauch folgen und das chemische Potential „FERMI-Niveau“ nennen; denn gerade bei Systemen mit Lücken im Energiespektrum kann nur ersteres gemeint sein!

Wir heben noch einmal hervor: Man ist stets auf der sicheren Seite, wenn man den thermodynamisch sauber definierten Begriff des chemischen Potentials verwendet. Halbleiterphysiker sind es gewohnt, dieses (nicht ganz korrekt) als FERMI-Energie zu bezeichnen.

### 3.9 Shubnikov-de Haas-Oszillationen

Ein System mit Lücken im Energiespektrum ist das von uns betrachtete System von Elektronen in einem konstanten Magnetfeld. Im Idealfall besteht es aus einer äquidistanten Menge von hochentarteten Niveaus, die im realen Fall durch Streuprozesse an Verunreinigungen verbreitert sind. Sowohl die Distanz als auch der Entartungsgrad (im idealisierten Fall) sind proportional zum äußeren Magnetfeld. Im Grenzfall niedriger Temperaturen treten beide in Konkurrenz, wenn die Elektronen sich bei dem sich verändernden Magnetfeld umverteilen.

Betrachten wir ein Beispiel: Das Magnetfeld und damit der Entartungsgrad seien so stark, daß alle Elektronen im untersten LANDAU-Niveau kondensiert sind. Vermindern wir nun langsam die Stärke des Magnetfeldes, so kommt irgendwann der Zeitpunkt, zu dem der Entartungsgrad sich so vermindert hat, daß einige der Elektronen auf das nächsthöhere LANDAU-Niveau ausweichen. Dieser Vorgang wiederholt sich entsprechend für die höheren Niveaus. Man kann es auch so sehen: Die FERMI-Energie  $E_F$  durchwandert die LANDAU-Niveaus. In der Realität sind diese nun verbreitert, d. h. wir finden eine schwankende Zustandsdichte bei  $E_F$ . Theoretische Analysen, die über die DRUDE-Transporttheorie hinausgehen, zeigen, daß auch die DRUDE-Impulsrelaxationszeit  $\tau$  schwanken kann. Hierbei spielt die Dynamik sogenannter *Screening-Effekte* (das sind Abschirmungseffekte von Störstellen) eine wesentliche Rolle. Schwankt aber die DRUDE-Impulsrelaxationszeit, so schwankt auch die Beweglichkeit der Elektronen. Eine kleine Zustandsdichte an der FERMI-Kante entspricht somit einer kleinen Beweglichkeit.

Bei vollständiger Füllung eines LANDAU-Niveaus, wenn also das chemische Potential genau zwischen zwei LANDAU-Niveaus liegt, finden wir auf der Hauptdiagonalen der Tensoren ein Minimum der diagonalen Leitfähigkeit  $\sigma_{xx}$  und damit auch ein Minimum des spezifischen Widerstandes  $\varrho_{xx}$ . Die Schwankungen der Probenleitfähigkeit in Abhängigkeit des äußeren Magnetfeldes sind die schon oben genannten SHUBNIKOV-DE HAAS-Oszillationen. Die SHUBNIKOV-DE HAAS-Minima liegen periodisch in  $1/B$ . Berechnen wir die Periode: Sei der Füllfaktor im allgemeinsten Fall (mit Valley- und Spin-Entartung)

$$\nu = g_s g_v \cdot i, \quad (217)$$

so können wir für die Anzahl der Ladungsträger schreiben:

$$n_{2D} = i \cdot n_L = i \cdot g_s g_v \cdot \frac{e B_{(i)}}{h}, \quad (218)$$

das heißt

$$\frac{1}{B_{(i)}} = \frac{i g_s g_v e}{h n_{2D}} \quad (219)$$

und damit

$$\frac{1}{B_{(i+1)}} = \frac{(i+1) g_s g_v e}{h n_{2D}}. \quad (220)$$

Die Differenz beider Terme ergibt die Periode der Oszillationen:

$$\Delta\left(\frac{1}{B}\right) = \frac{1}{B_{(i+1)}} - \frac{1}{B_{(i)}} = g_s g_v \cdot \frac{e}{h n_{2D}}. \quad (221)$$

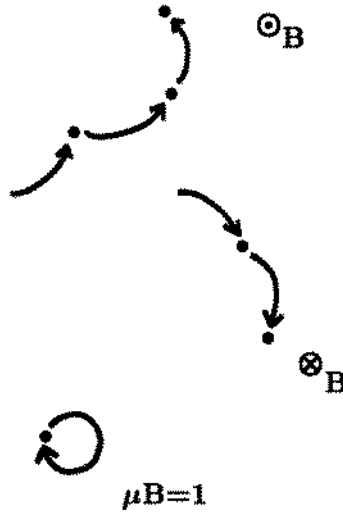


Abbildung 14: Zustandekommen des Magnetowiderstandes

Voraussetzung für die Beobachtung der SHUBNIKOV-DE HAAS-Oszillationen sind

1. die Tatsache, daß das Produkt aus äußerem Magnetfeld  $B$  und Beweglichkeit  $\mu = e\tau/m$  der Ladungsträger möglichst hoch ist

$$\mu B \gg 1, \quad (222)$$

was äquivalent ist zur Bedingung

$$\omega_c \tau \gg 1. \quad (223)$$

Die Elektronen sollten also mindestens einmal, möglichst mehrmals kreisen, ohne an einem Streuprozeß teilzunehmen. Diese Bedingung bestimmt den Einsatz der SHUBNIKOV-DE HAAS-Oszillationen und ist erst bei niedrigen Temperaturen relevant. In Zahlen: Sei

$$T = 3 \text{ K}, \quad (224)$$

dann ist

$$4 kT \approx 1 \text{ meV}. \quad (225)$$

Gleichzeitig ist

$$\hbar \omega_c = 1.65 \text{ meV } B(T), \quad (226)$$

mit der effektiven Masse für Elektronen in Galliumarsenid

$$m = 0.07 m_e; \quad (227)$$

2. die Tatsache, daß die thermische Aufweichung der FERMI-Kante deutlich schmaler ist als der energetische Abstand zweier LANDAU-Niveaus

$$\hbar \omega_c \gg k_B \cdot T, \quad (228)$$

typisch

$$\hbar \omega_c \geq 4 k_B T, \quad (229)$$

das heißt, die verwendeten Temperaturen sollten möglichst niedrig sein.

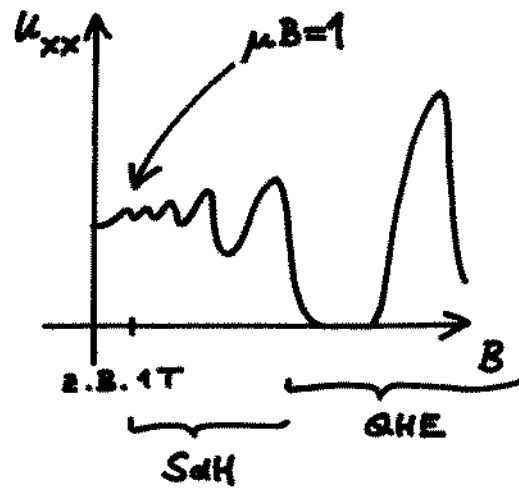


Abbildung 15: SHUBNIKOV-DE HAAS-Oszillationen (schematisch)

Konzept	Phänomen		Entdeckungsjahr
	•	Beobachtung der Supraleitung in Hg	1911
•		DIRAC-Monopol (hypothetisch)	1931
	•	MEISSNER-OCHSENFELD-Effekt	1933
•		LONDON-Theorie	1935
	•	Supraflüssiges Helium-4	1938
•		GINZBURG-LANDAU-Theorie	1950
•		BCS-Supraleitung	1956/1957
•	•	AHARONOV-BOHM-Effekt	1959
•	•	Flußquantisierung	1961
•	•	JOSEPHSON-Effekt	1962
	•	Supraflüssiges Helium-3	1972
	•	Quantisierter HALL-Effekt	1981
	•	Hochtemperatur-Supraleitung	1986
	•	Supraleitung in Fullerenen	1991

Tabelle 1: Makroskopische Quanteneffekte und topologische Quantisierungseffekte

## 4 Deutung des Effektes

### 4.1 Eichtheoretisches Argument nach Laughlin

Der quantisierte HALL-Effekt gehört offensichtlich in die Kategorie makroskopischer Quanteneffekte bzw. topologischer Quantisierungseffekte; siehe hierzu die beigelegte Tabelle.

Es war F. LONDON, der als erster die Idee hatte, das von WEYL vorgeschlagene Eichfeldkonzept, welches das elektromagnetische Vektorpotential in Relation zu einer spekulativen Längenänderung von Vektoren unter Parallelverschiebung im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie (!) setzt, neu zu interpretieren, nämlich als den Generator einer

Drehung der Phase der quantenmechanischen Wellenfunktion [76]. F. LONDON war auch der erste, der über die Existenz quantisierter magnetischer Flüsse spekulierte [75].

In diese Kategorie von Argumenten fällt auch das Eichargument von LAUGHLIN, das auf einem Gedankenexperiment beruht [49]: Unter der Annahme, daß die Wellenfunktion in der HALL-Probe ausgedehnt ist und als makroskopische Größe eindeutig ist, erhalten wir eine der Flußquantisierung analoge Bedingung, wenn wir die Probe zu einem Ring so zusammenbiegen, daß Strominjektions- (engl. *source*) und Stromextraktionskontakt (engl. *drain*) miteinander identifiziert sind. Der quantisierte Fluß durch den Ring sei mit  $\Phi$  bezeichnet und ist von dem magnetischen Fluß, der dem HALL-Magnetfeld entspricht, welches an jeder Stelle normal zur Probenfläche ausgerichtet ist, wohl zu unterscheiden. Man nennt ihn auch den *fiktiven magnetischen Fluß*.

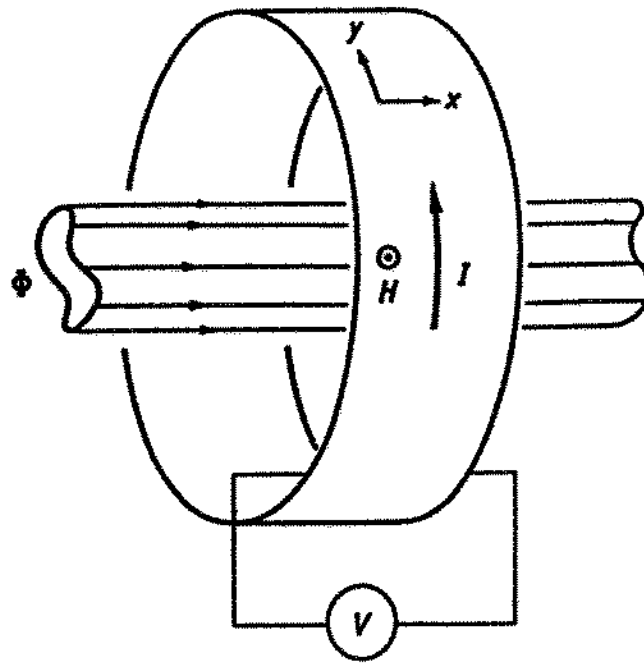


Abbildung 16: LAUGHLINs Eichargument

Uns interessiert die Beziehung von totalem Strom  $I$  durch die Probe zum Spannungsabfall zwischen den Seitenkanten am Rande des Transportweges der Ladungsträger. Wir

können sie aus dem FARADAYSchem Induktionsgesetz herleiten. Letzteres schreiben wir nicht, wie üblich als

$$U_{ind} = -n \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (230)$$

sondern als

$$I = \frac{\partial E_{ww}}{\partial \Phi}. \quad (231)$$

Überprüfen wir diese Formel: Man überzeugt sich leicht, daß die Einheiten stimmen: Energie wird in Volt-Ampere-Sekunde gemessen und der magnetische Fluß in Volt-Sekunde. Andererseits ist die Wechselwirkungsenergie im Falle der hier gewählten Probengeometrie (mit den Kantenlängen  $a, b, c$ )

$$E_{ww} = \int \mathbf{j}_{2D} \mathbf{A} d^3x = |\mathbf{j}_{2D}| b \cdot |\mathbf{A}| c = I \cdot \Phi. \quad (232)$$

Differentiation nach  $\Phi$  reproduziert das gewünschte Ergebnis. Wegen der Quantisierung des fiktiven magnetischen Flusses müssen wir die partielle (adiabatische) Ableitung durch eine Differenz ersetzen. Für  $i$  Elektronen, die von der einen zur gegenüberliegenden Seitenkante transportiert werden, erhalten wir die Energie- bzw. Strombilanz

$$I = \frac{\Delta E_{ww}}{\Delta \Phi} = i \cdot \frac{\text{Elektronenenergie}}{\text{Flußquantum}} = \frac{ieU_H}{h/e} = \frac{ie^2}{h} U_H. \quad (233)$$

Das heißt, daß wir unter der Voraussetzung, daß die dem superstrom-ähnlichen HALL-Strom zugeordnete Wellenfunktion die Eichinvarianz der Theorie in der Ebene respektiert, die gewünschte Quantisierung erhalten.

Wie wir schon oben gesehen haben, liefert das Denken in Termen von Flußquanten tiefe Einsichten in den fundamentalen Charakter des quantisierten HALL-Effektes: Offensichtlich können wir die Stärke des Magnetfeldes durch die auf eine Flächeneinheit bezogene Anzahl  $n_{\Phi_0}$  von Flußquanten  $\Phi_0$  ausdrücken; das heißt, es ist

$$B = n_{\Phi_0} \cdot \Phi_0 = n_{\Phi_0} \cdot \frac{h}{e}. \quad (234)$$

Somit erkennen wir in der Größe

$$g_s g_v \cdot n_{\Phi_0} = g_s g_v \cdot \frac{eB}{h} = n_L \quad (235)$$



den Entartungsgrad eines LANDAU-Niveaus wieder. Wir können auch schreiben

$$\begin{aligned} \text{Anzahl der gefüllten LANDAU-Niveaus} &= \frac{1}{g_s g_v} \cdot \frac{\text{Anzahl der Ladungsträger}}{\text{Anzahl der Flußquanten}} \\ &= \frac{1}{g_s g_v} \cdot \frac{\hbar n_{2D}}{eB} = \frac{1}{g_s g_v} \cdot \nu = \frac{n_{2D}}{n_L}. \quad (236) \end{aligned}$$

Wenn wir der Einfachheit halber  $g_s = g_v = 1$  annehmen, haben wir für  $\nu = 1$  gerade einen Zustand vorliegen, in dem sich in der Probe genauso viele Ladungsträger wie Flußquanten befinden. Nach KIVELSON, LEE und ZHANG liegt dann ein makroskopischer Quantenzustand vor, in dem bosonische Quasiteilchen, welche man sich als Bindungszustände von je einer elektrischen Ladung und je einem magnetischen Flußquant vorzustellen hat, in einen durch eine makroskopische Wellenfunktion zu beschreibenden Quantenzustand kondensiert sind [38, 39, 77, 78]. Dieser Zustand ist vergleichbar mit einem supraleitenden Grundzustand geladener Bosonen. (Analoges gilt für die höheren Füllfaktoren.)

So suggestiv diese Vorstellungen auch sein mögen - ihre Rechtfertigung ergäbe sich erst aus einer *mikroskopischen* Beschreibung des beobachteten Effektes. Die Situation ist hier ganz ähnlich wie in der gewöhnlichen Supraleitung: So ermöglicht die in Termen einer makroskopischen Wellenfunktion formulierte LANDAU-GINZBURG-Theorie eine ziemlich treffende Beschreibung (i) des Phasenübergangs vom normalleitenden zum supraleitenden Zustand, (ii) des Verhaltens gegenüber äußeren Magnetfeldern sowie (iii) der Eigenschaften von Flußschläuchen; eine mikroskopische Erklärung liefert aber erst die Theorie von BARDEEN, COOPER und SCHRIEFER, ausgehend von der Idee einer von Phononen vermittelten schwach attraktiven Wechselwirkung von Elektronen und der Bildung von sogenannten COOPER-Paaren, die - als Quasibosonen - schließlich in den supraleitenden Grundzustand kondensieren.

Für den integral-quantisierten HALL-Effekt bleibt also die Frage: Was ist die fundamentale Elektron-Elektron-Wechselwirkung, welche den makroskopischen Quantenzustand herbeiführt? Diese Frage steht im klaren Gegensatz zur weitverbreiteten Lehrmeinung, der integral-quantisierte HALL-Effekt lasse sich im Rahmen einer Theorie nicht-wechselwirkender Elektronen vollständig verstehen. Eine befriedigende Antwort steht bis heute noch aus.

## 4.2 Lokalisierungsbild (bulk states)

Durch unterschiedlich starke Streuung der Elektronen an Störstellen wird die hochgradige Entartung der LANDAU-Niveaus (teilweise) aufgehoben, so daß diese sich zu Bändern verbreitern. Wenn wir den quantisierten HALL-Effekt erklären wollen, müssen wir annehmen,

- daß die Elektronen, die im Zentrum eines solchen Bandes liegen, nicht gestreut werden, und somit ausgedehnte Zustände bilden, die zum Stromtransport beitragen,
- daß Elektronen, die in einer gewissen Umgebung des Zentrums liegen, so gestreut werden, daß sie lokalisierte Zustände bilden.

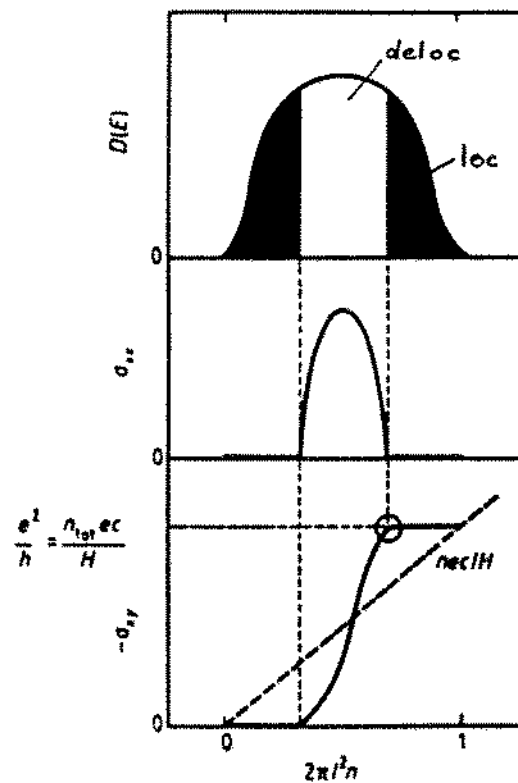


Abbildung 17: Lokalisierung versus Delokalisierung

Die Störstellen in der Probe bilden ein „Potentialgebirge“. Die elektronische Wellenfunktion neigt dazu, sich in dessen Tälern zu lokalisieren. In Konkurrenz dazu neigen Tunneleffekte zwischen benachbarten Minima dazu, die Wellenfunktion zu delokalisieren. Zusätzlich versucht das Magnetfeld, die Elektronen auf Kreisbahnen zu zwingen. Daß sich nun alle Effekte zusammen so arrangieren, daß der beschriebene Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang mit einer so robusten Quantisierung verträglich ist, muß in einer mikroskopischen Theorie erst einmal gezeigt werden, und zwar rigoros, nicht nur vermittelt Computer-Simulation. In dem vorliegenden Rahmen wollen wir uns darauf beschränken, dies als plausible Annahme gelten zu lassen.

Entscheidend für das Auftreten des quantisierten HALL-Effektes ist nun, wie sich das System beim Durchfahren des chemischen Potentials durch die verbreiterten LANDAU-Niveaus verhält. Für den Fall eines ansteigenden Magnetfeldes beobachten wir:

- Solange Bereiche lokalisierter Zustände durchfahren werden, können Zustände, die mit Elektronen be- oder entvölkert werden, nichts zur Leitfähigkeit der Probe beitragen. In diesem Bereich ändert sich nichts am HALL-Widerstand der Probe und der quantisierte Wert bleibt erhalten. Die longitudinale Leitfähigkeit (und damit der longitudinale Widerstand) verschwindet.
- Werden Bereiche ausgedehnter Zustände durchfahren, liefern die Zustände, die mit Elektronen be- oder entvölkert werden, einen Beitrag zur Leitfähigkeit. In diesem Bereich ändert sich die HALL-Leitfähigkeit der Probe. Die longitudinale Leitfähigkeit ist gerade die Steigung dieser Änderung versus äußerem Magnetfeld. (Letztere Aussage ist im Sinne eines phänomenologischen Fits zu verstehen; einen einfachen formalen Beweis, der von einfachen physikalischen Voraussetzungen ausgeht, gibt es leider nicht.)

Die bisherigen experimentellen Fakten legen nahe, daß der quantisierte HALL-Effekt unabhängig von Geometrie und Größe der Probe ist. Eine mikroskopische Theorie, welche den Effekt an sich erklärt, sollte auch diese Tatsache erklären. Wir erwarten daher, daß die Theorie wesentlich auf Renormierungsgruppen-Argumente, also auf Analysen von Skalenverhalten einer *Quantentheorie eines ungeordneten Systems im Magnetfeld* bauen muß.

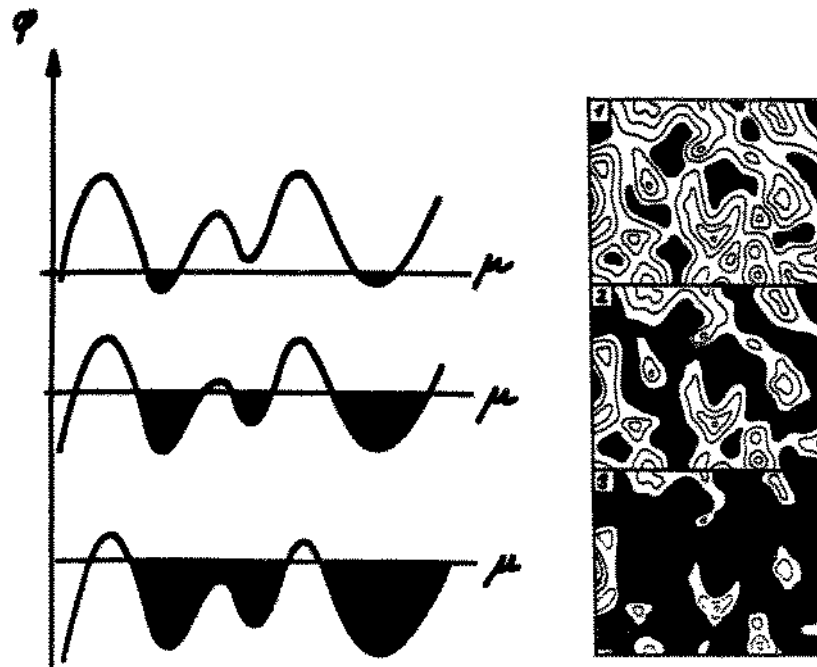


Abbildung 18: Lokalisierung-Delokalisierung und Percolation

In der Tat ist dies genau der Ansatz, von dem in modernen quantenfeldtheoretischen Zugängen zum quantisierten HALL-Effekt ausgegangen wird. Der interessierte Leser sei auf den hervorragenden, gut zu lesenden einführenden Artikel von KHURANA in *Physics today* hingewiesen, der auch einen Hinweis auf interessante Originalarbeiten gibt [35].

An dieser Stelle seien kurz die wesentlichen Ideen der bahnbrechenden Arbeiten von LEVINE, LIBBY, PRUISKEN und KHMEL'NITZKII skizziert [50, 60, 34].

Wie KHURANA in seinem einführenden Artikel hinweist, gibt es Analogien zur Quantenfeldtheorie der Elementarteilchen. In der Transporttheorie spielen Leitfähigkeiten die Rolle inverser Kopplungskonstanten in der Quantenfeldtheorie. Die Untersuchung der allgemeinen Struktur einer Elementarteilchentheorie führt stets auf eine Renormierungsgruppenanalyse: Wie skalieren die Kopplungskonstanten beim Skalieren des Impulsübertrages? Im Falle der nichtabelschen Eichtheorien beobachtet man zum Beispiel *asymptotische Freiheit* (das Verschwinden der Wechselwirkungen der Quarks im Hochenergie-Limes), in der Sprache der Renormierungsgruppe ultraviolett stabiler Fixpunkt genannt. Umgekehrt ist das Verhalten der Kopplungskonstante im Infrarot-Limes so, daß die Wechselwirkung immer stärker wird: Quark Confinement. Für eine Diskussion all dieser Fragen siehe [30].

Im Falle des Stromtransports entspricht dies dem Fall verschwindender Leitfähigkeit bei wachsender Systemgröße. Dies ist exakt der Fall, den wir im Verschwinden metallischen (ohmschen) Verhaltens beim Vorliegen von *Lokalisierung* in niederen Dimensionen haben.

Alle beschriebenen Systeme lassen sich in einem feldtheoretischen LAGRANGESchen Rahmen beschreiben. Dabei kann man aus den klassischen Bewegungsgleichungen nur einen ganz kleinen Teil der Physik ablesen; die wesentlichen Strukturen werden im allgemeinen erst im Rahmen der Quantisierungsprozedur (GREEN-Funktionen, FEYNMAN-Graphen etc.) mittels oft mühseliger Rechnungen sichtbar.

Bestimmte Strukturen haben kein klassisches Analogon: So ist aus der Quantenfeldtheorie wohlbekannt, daß man Terme zur LAGRANGE-Funktion hinzuaddieren kann, welche die Bewegungsgleichungen nicht ändern, wohl aber die quantenmechanische Phase drehen, die ja proportional zu  $\exp iS$  ist, mit  $S = \int L dt$  als Wirkung. (In der klassischen Mechanik sind dieses die Terme proportional zu einer totalen Zeitableitung.) In der üblichen Elektrodynamik in drei Raumdimensionen wäre dies ein Zusatzterm proportional zu  $\mathbf{E} \cdot$

$\mathbf{B}$ , ein sogenannter CHERN-PONTRYAGIN-Term (im Gegensatz zum üblichen MAXWELL-Term proportional zu  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ ), in der 2-dimensionalen Version ein sogenannter CHERN-SIMONS-Term proportional  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Fordern wir, daß die Wellenfunktionen  $\psi \sim \exp iS$  der betrachteten Quantisierung eindeutig sind, so müssen die diesen topologischen Termen zugeordneten Kopplungskonstanten quantisiert sein.

Es sind LAGRANGE-Funktionen genau dieses Typs, welche in der Magnetotransporttheorie eine Rolle spielen und die sich durch zwei Kopplungsparameter, einem konventionellen ( $\sigma_{xx}$ ) und einem topologischen ( $\sigma_{xy}$ ), auszeichnen. Das entsprechende *two-parameter scaling* zeigt, daß bei wachsender Systemgröße die topologische Kopplungskonstante (die gerade der HALL-Leitfähigkeit entspricht) quantisierte Werte annimmt, die gewöhnliche Kopplungskonstante hingegen das beobachtete oszillatorische Verhalten zeigt. Diese „Aufblähterung“ von Quantenfeldtheorien mit topologischen Termen ist ein universelles Phänomen und den Theoretikern wohlbekannt [11, 12]. (Die Abbildung zeigt die entsprechenden Renormierungsgruppenflüsse, wobei die Pfeile in Richtung wachsender Systemgröße zeigen [34].)

Interessant dabei ist, daß die aus der Lokalisierungstheorie hervorgegangenen mikroskopischen Quantenfeldtheorien des quantisierten HALL-Effektes gerade vom ersten Typus [60], die phänomenologischen Theorien hingegen vom zweiten Typus sind [20]. Die zugeordneten LAGRANGE-Dichten haben stets die Form

$$\mathcal{L} = \sigma_{xx} \cdot \mathcal{L}_0 + \sigma_{xy} \cdot \mathcal{L}_{top}. \quad (237)$$

Dies erklärt schließlich, warum die Quantisierung exakt sein muß. Die Sache hat nur zwei Haken: Zum einen steckt in der Wahl der geeigneten LAGRANGE-Dichte - gleichgültig, auf welchem Level sie erfolgt - immer eine Modell-Annahme; zum anderen ist es sehr schwer, die Quantenfeldtheorie dieses Problems rigoros zu lösen. Letzteres gilt aber auch für die experimentell am erfolgreichsten verifizierte Theorie schlechthin, die Quantenelektrodynamik.

*Bemerkung:* Man könnte an dieser Stelle vielleicht einwenden, daß die hier nur angerissenen Formalismen ein wenig zu akademisch sind und daß alles auch viel einfacher gehen müßte. Unter Experten besteht aber durchaus ein Konsensus darin, daß die Anwendung

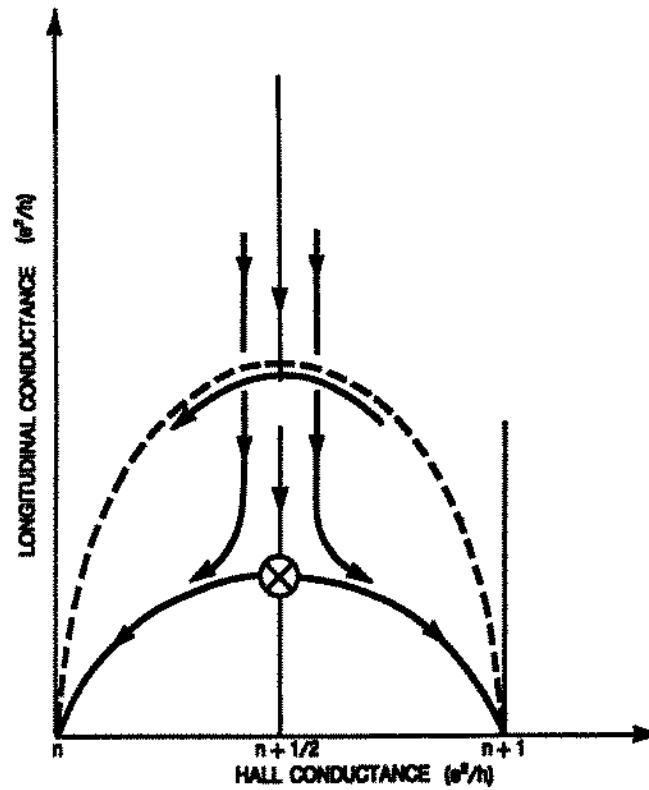


Abbildung 19: PRUISKEN-KHMEL'NITZKII two-parameter scaling

quantenfeldtheoretischer Methoden für den Lokalisierungs-Delokalisierungs-Übergang im äußeren Magnetfeld der geeignete Rahmen ist (siehe z. B. [32]).



### 4.3 Randkanal-Bild (edge states)

Die Physik des quantisierten HALL-Systems ist ein ausgezeichnetes Beispiel für die Anwendung einer quantenelektrodynamischen Theorie auf ein reales System der kondensierten Materie. Diese muß natürlich die lokale Eichinvarianz, die ein sehr fundamentales physikalisches Prinzip darstellt, respektieren. Wenn das betrachtete physikalische System, die Probe, eine endliche Ausdehnung und damit einen Rand besitzt, muß die Eichinvarianz auf dem Rand (engl. *edge*) kompatibel zur Eichinvarianz im Hauptteil (engl. *bulk*) sein. Hätten wir zum Beispiel ein Modell des quantisierten HALL-Systems in einem LAGRANGESchen Rahmen formuliert und würden durch Variation der Wirkung die klassischen Bewegungsgleichungen ableiten, so müßten wir bei der Variation Randterme berücksichtigen, die im unendlich ausgedehnten Fall meistens wegdiskutiert werden.

Es ist eine wohlbekannte Tatsache aus der mathematischen Physik, daß Begriffe wie chemisches Potential und Strom ihren Ursprung in der Eichinvarianz haben [6]. Eichinvarianz impliziert die Existenz von Ladungen und zugeordneten Erhaltungsgesetzen. Meist ist die Ladung in elementarer Weise mit den Teilchen verknüpft, so daß wir auch von Erhaltung der Teilchenzahl  $N$  sprechen dürfen. (Dies ist aber nicht der allgemeinste Fall.) Thermodynamische Gleichgewichtszustände solcher Systeme werden nicht nur durch die inverse Temperatur  $\beta = 1/kT$ , der kanonisch konjugierten Variablen zur Energie, sondern durch ein chemisches Potential  $\mu$ , der kanonisch konjugierten Variablen zur Teilchenzahl (im allgemeinen Fall zur Gesamtladung), gekennzeichnet. Zwischen zwei Kontakten, die ja die Verbindungen der Probe zu Reservoirs, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, darstellen, muß die Differenz des chemischen Potentials endlich sein, wenn wir einen elektrischen Stromtransport haben wollen.<sup>15</sup>

---

<sup>15</sup>Bei Bosonen ist die Endlichkeit des chemischen Potentials Voraussetzung für die Möglichkeit der sogenannten BOSE-Kondensation, mit deren Hilfe man den im Praktikumsexperiment beobachtbaren  $\lambda$ -Übergang (nach der Form des Verlaufs der spezifischen Wärme) des flüssigen Helium-4 bei 2.18 K in den supraflüssigen Zustand erklären kann. Es gibt auch eine Theorie des quantisierten HALL-Effekts, welche sich auf das Prinzip der BOSE-Kondensation bezieht. Hier sind die Bosonen gedachte Bindungszustände aus Flußquanten und Elektronen, welche bei ganzzahligen (oder auch bestimmten rationalen) Füllfaktoren kondensieren (siehe auch [38, 39, 77, 78]).

Im Falle von BOSE-Gasen unbeschränkter Teilchenerzeugung, oder etwas präziser gesprochen, im Falle

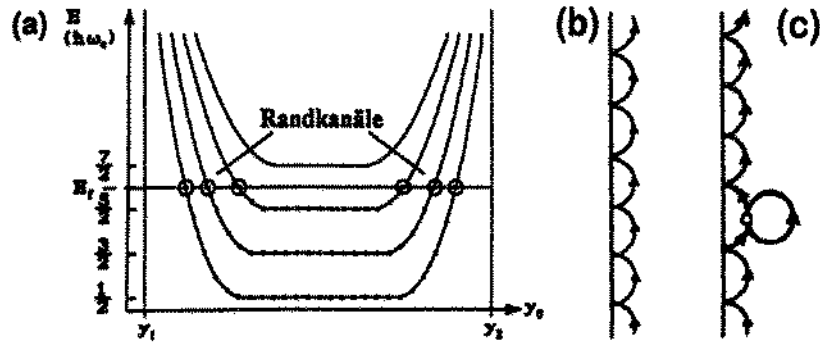


Abbildung 20: Randzustände versus Volumenzustände

Nun besteht elektrische Leitfähigkeit immer dann, wenn sich die Elektronen zugunsten einer bestimmten Bewegungs- oder Vorzugsrichtung im  $k$ -Raum (auf den Parabeln der Subbänder) umverteilen können. Dabei sind lediglich die Elektronen nahe der FERMI-Kante wesentlich, da alle energetisch tieferliegenden Zustände besetzt sind und ihre Umbesetzung durch die Ununterscheidbarkeit der Elektronen trivial ist, das heißt nichts zum Transport beiträgt. Ferner müssen freie Zustände einer Vorzugsrichtung im  $k$ -Raum vorhanden sein, d. h. die Zustandsdichte bei der FERMI-Energie darf nicht verschwinden. Wie wir gesehen haben, wird diese Bedingung gerade in der Umgebung der LANDAU-Niveaus erfüllt.

Der wesentliche Punkt ist nun der folgende: Neben dem schon vorgestellten Szenario, daß die FERMI-Energie ein räumlich starr vorgegebenes Spektrum von LANDAU-Bändern durchläuft, dürfen wir davon ausgehen, daß letztere sich selbst an dem Rand der Probe so nach oben biegen, daß sie ihrerseits eine global konstante FERMI-Kante durchlaufen. Denn die Tatsache, daß der Probenrand für die Elektronen ein unüberwindliches Hindernis darstellt, kann so gedeutet werden, daß die Elektronen der Probe in einem Potentialtopf von Gasen von BOSONEN ohne ladungsartige erhaltende Quantenzahl (wie Photonen und Phononen) gibt es kein chemisches Potential und somit auch *nicht* die Möglichkeit der BOSE-Kondensation. Daß man das Photonengas in einem Hohlraum lediglich durch einen Parameter, nämlich  $\beta = 1/kT$ , charakterisieren kann, ist gerade einer der Eckpfeiler der berühmten Hypothese PLANCKS und seiner Entdeckung der nach ihm benannten Konstante (vgl. [69, 23]).

oder einsperrendem Potential (engl. *confining potential*) gefangen sind. Somit kreuzt jedes LANDAU-Niveau infolge des starken Confining-Potentials die FERMI-Energie am Rand der Probe, an dem somit ein Kanal nicht verschwindender Zustandsdichte entsteht.

Die Bewegung der Elektronen am Rand der Probe kann man sich aus Teilkreisen (engl. *skipping orbits*) zusammengesetzt denken. Eine Streuung nach innen oder gar von Probenrand zu Probenrand besitzt eine verschwindende Wahrscheinlichkeit, da ein vom Rand in die Probe hineinkreisendes Elektron, wenn es auf eine Störstelle trifft, nach einem weiteren Umlauf wieder an den Rand zurückgestreut wird. Offensichtlich haben *skipping orbits* eine höhere Frequenz als die Vollkreise, das heißt, ihre Energie ist größer. Dies erklärt auf semiklassischen Niveau, warum die Randzustände eine höhere Energie haben müssen als die Zustände im Innern.

Wir fassen zusammen: Solange wir uns also nicht im Zentrum eines LANDAU-Niveaus befinden, verschwindet die Leifähigkeit im Probeninnern: Dort stehen keine Zustände für den Stromfluß zur Verfügung. Für jedes LANDAU-Niveau bildet sich ein Randkanal aus, wobei der dem niedrigsten LANDAU-Level zugeordnete Kanal am weitesten außen liegt.

Beschreiben wir nun den Stromtransport am Rand der Probe im Rahmen einer 1-dimensionalen Transporttheorie von LANDAUER und BÜTTIKER [10, 45]. Eine solche Theorie kann in Analogie zur Wärmeleitung gesehen werden. Dort wird die Frage behandelt, wie Energie von einer heißen zu einer kalten Stelle transportiert wird. Energie und Temperatur sind in gleicher Weise duale oder konjugierte Variablen wie Teilchenzahl (oder besser Ladung) und chemisches Potential. Stellen wir uns also die auf dem Rand kontaktierte Probe als ein System vor, in dessen Rand an bestimmten Stellen das chemische Potential lokal fixiert ist. Zur Berechnung der gemessenen Leitfähigkeiten müssen wir einen Ausdruck für einen 1-dimensionalen Strom in Termen der 1-dimensionalen Zustandsdichte angeben.

Diese ist für den allgemeinen Fall gegeben durch

$$D_{1D}(E) = g_s g_v \cdot \frac{1}{h} \sqrt{\frac{m}{2E}}. \quad (238)$$

Es ist hervorzuheben, daß es zu jedem Energieeigenwert  $E$  *zwei* Gruppengeschwindigkeiten  $v_g$  gibt, die sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Wir können schreiben:

$$v_g(E) = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{dE}{dk} \right|_E = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{d(\hbar^2 k^2 / 2m)}{dk} \right|_E = \left. \frac{\hbar k}{m} \right|_E = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (239)$$

In der Berechnung des elektrischen Stroms in einem 1D-Elektronensystem, der sich aus dem Produkt von Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  und Elektronenladung  $e$  gewichtet mit der Zustandsdichte  $D_{1D}(E)$  und der FERMI-DIRAC-Verteilungsfunktion

$$f(E) = \frac{1}{\exp(E - \mu)/kT + 1} \quad (240)$$

ergibt, darf nur ein Zweig berücksichtigt werden. Somit ist

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{1}{2} e v_g D_{1D}(E) f(E) dE \\ &= \frac{e}{2} \cdot \int_0^\infty \sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot g_s g_v \cdot \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} \cdot f(E) dE \\ &= g_s g_v \cdot \frac{e}{h} \cdot \int_0^\infty f(E) dE \\ &= g_s g_v \cdot \frac{e}{h} \mu. \end{aligned} \quad (241)$$

Man erinnere sich, daß im Grenzfall  $T \rightarrow 0$  die FERMI-DIRAC-Verteilungsfunktion die Form

$$f(E) = \begin{cases} 1, & \text{falls } E < \mu, \\ 0, & \text{falls } E > \mu, \end{cases} \quad (242)$$

hat. Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in das obige Integral verifiziert man leicht das Ergebnis der Rechnung für den Fall verschwindender Temperatur.

Betrachten wir nun einen direkten Halbleiter mit  $g_v = 1$ , so folgt aus der zweifachen Spinartung  $g_2 = 2$  für den Transport in 1D-Kanälen mit

$$\mu = eU \quad (243)$$

die Beziehung

$$I = i \cdot \frac{2e^2}{h} \cdot U =: R_{ball} \cdot U, \quad (244)$$

für  $i$  besetzte Subbänder mit

$$R_{ball} = \frac{U}{I} = \frac{h}{2e^2} = 12.9064 \dots k\Omega. \quad (245)$$

Eine solche Quantisierung der elektrischen Leitfähigkeit im Regime des ballistischen Transports (in dem die Bewegung der Elektronen streufrei erfolgt) wurde 1988 erstmalig entdeckt [68, 70, 71, 72], siehe auch [36]. In starken Magnetfeldern (und auch in starken elektrischen Feldern) wird die Spinentartung meßbar aufgehoben, und es entwickeln sich für die Leitfähigkeit zusätzlich Halb-Plateaux, d. h. ungerade Vielfache von  $e^2/h$ . Neuere Forschungen in Bochum und Cambridge haben gezeigt, daß unterhalb von  $2e^2/h$  ein Zwischenplateau auch ohne äußeres Magnetfeld auftritt, wobei noch nicht ganz klar ist, ob es sich dabei um eine  $0.5 \cdot (2e^2/h)$ - oder um eine  $0.7 \cdot (2e^2/h)$ -Struktur handelt. Unabhängig davon ist *schon die Struktur an sich* ein Hinweis auf eine spontane Spin-Polarisation bzw. einen spontanen Magnetismus infolge einer Elektron-Elektron-Wechselwirkung [64, 65].

Im folgenden wollen wir die Quantisierung der HALL-Leitfähigkeit durch die Quantisierung der 1D-Randzustände verstehen. Dabei können wir davon ausgehen, daß die soeben vorgestellte Spinentartung aufgehoben ist. Wir setzen also  $g_s = 1$  und setzen ferner  $g_v = 1$  an, was z. B. für GaAs-Heterostrukturen gilt.

Wir nehmen im folgenden an, daß unsere Probe die Form eines typischen HALL-Stabes (engl. *Hall bar*) habe und mit sechs Kontakten  $\mu_1, \dots, \mu_6$  (im Uhrzeigersinn gezählt) versehen ist, welche die chemischen Potentiale festlegen. *Per conventionem* sei  $\mu_1$  die Source (hier fließt der Strom  $j_x$  hinein) und  $\mu_4$  der Drain (hier fließt der Strom  $j_x$  ab). Die HALL-Spannung kann zwischen den jeweils gegenüberliegenden Kontakten  $\mu_2$  und  $\mu_6$  bzw.  $\mu_3$  und  $\mu_5$  abgenommen werden. Entsprechend messen wir den longitudinalen Spannungsabfall zwischen  $\mu_2$  und  $\mu_3$  bzw.  $\mu_5$  und  $\mu_6$ . Über die Kontakte  $\mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6$  sollten keine Ströme ab- oder zufließen, so daß  $\mu_1$  und  $\mu_4$  den Gesamtstrom tragen müssen. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß „spannungsrichtig gemessen wird“, das heißt, der Innenwiderstand unseres Voltmeters gegen unendlich geht.

Der totale Strom eines Kontaktes oder Reservoirs ist die Differenz der Ströme, die von einlaufenden und auslaufenden Kanälen getragen werden. Wir müssen also den ankommenden Strom von dem injizierten Strom abziehen, um den totalen Strom zu erhalten.

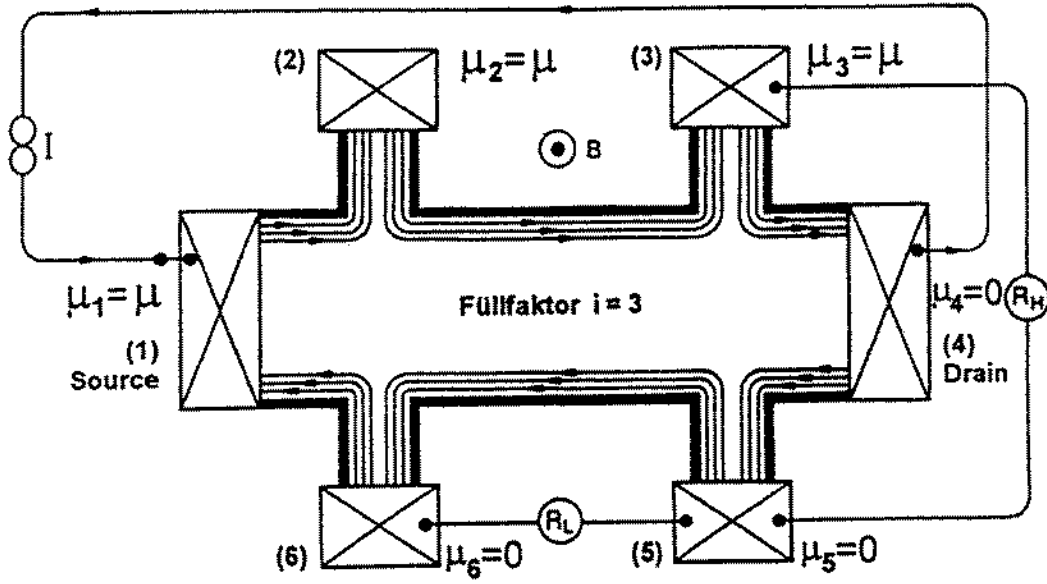


Abbildung 21: Randstromkanäle

Unter der Annahme, daß der Transportstrom sich im Uhrzeigersinn bewegt, erhalten wir

Source reservoir	$\mu_1 : I_{tot} = I = i \cdot \frac{e}{h} (\mu_1 - \mu_6)$	
Potential reservoir	$\mu_2 : I_{tot} = 0 = i \cdot \frac{e}{h} (\mu_2 - \mu_1)$	
Potential reservoir	$\mu_3 : I_{tot} = 0 = i \cdot \frac{e}{h} (\mu_3 - \mu_2)$	
Drain reservoir	$\mu_4 : I_{tot} = -I = i \cdot \frac{e}{h} (\mu_4 - \mu_3)$	
Potential reservoir	$\mu_5 : I_{tot} = 0 = i \cdot \frac{e}{h} (\mu_5 - \mu_4)$	
Potential reservoir	$\mu_6 : I_{tot} = 0 = i \cdot \frac{e}{h} (\mu_6 - \mu_5)$	(246)

Der HALL-Widerstand ergibt sich somit als

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{(\mu_3 - \mu_5)/e}{I} = \frac{(\mu_3 - \mu_5)}{i(\mu_3 - \mu_5)e^2/h} = \frac{h}{ie^2}, \quad (247)$$

der longitudinale Magnetowiderstand als

$$R_{xx} = \frac{U_{xx}}{I} = \frac{(\mu_2 - \mu_3)/e}{I} = 0. \quad (248)$$

Man beachte, daß die Leitfähigkeit pro Randkanal gerade

$$\delta\sigma = \frac{e^2}{h} \quad (249)$$

ist, die Summe somit

$$\sigma = i \cdot \frac{e^2}{h} . \quad (250)$$

Das Randkanal-Bild berücksichtigt, im Gegensatz zum Lokalisierungsbild, die Geometrie der Probe und das Vorhandensein von Kontakten. Es erklärt die Quantisierung des HALL-Widerstandes als Folge der 1D-Quantisierung der Leitfähigkeit. Als versteckte Annahme enthält es aber die Lokalisierung im Bulk und kann daher nicht für sich isoliert betrachtet werden. Wohl aber muß eine Theorie der Edge-States verträglich sein mit einer solchen, welche den Bulk beschreibt. Das Randkanal-Bild erklärt allerdings *nicht* die Form der Übergänge zwischen den Plateaux und deren Breite.

## 5 Aufgaben

Es ist für das Verständnis des Versuches *sehr nützlich*, die theoretischen Aufgaben schon im Rahmen der Vorbereitungen zu lösen. Die experimentellen Aufgaben sollten im Rahmen der Durchführung und Auswertung des Versuchs *vollständig* bearbeitet werden. Die relevanten Daten der Geräte-Eichung und der MBE-Wachstumsprotokolle erfragen Sie bitte beim Assistenten.

### 5.1 Theorie

Die folgenden Aufgaben sollten einen Anhaltspunkt dafür geben, was von den Studierenden im Rahmen der Vorbereitung erwartet wird.

Eine Bemerkung zum Literaturstudium: Obwohl dieses Skript so *self-contained* wie möglich gehalten wurde, sei zumindest eine Lektüre der Quellen [40], [42] und [43] empfohlen. Wer noch ein wenig über unseren Horizont blicken möchte, sei auf [39] verwiesen.

Während des Versuchs besteht ausreichend Zeit, über den theoretischen Hintergrund des Experiments zu diskutieren und offene Fragen zu klären. Die relevanten Daten der Probe, das heißt, die MBE-Wachstumsprotokolle, und die Eichung der Geräte erfragen sie bitte beim Assistenten.

Transportmessungen im Quantenregime sind Präzisionsmessungen. Besondere Sorgfalt muß daher auf eine wirksame Unterdrückung von Störeinflüssen (Netzbrummen, Störungen durch Radio- und Fernsehsender, thermisches Hintergrund-Rauschen etc.) gelegt werden. Eine sehr effektive Methode in diesem Zusammenhang ist die Lock-In-Technik. Im Addendum zu dieser Anleitung finden Sie einen Auszug aus dem einführenden Kapitel der Anleitung eines kommerziellen Lock-In-Verstärkers, in dem das Prinzip auch für den elektronischen Laien verständlich erklärt wird [62].

1. In der obigen Einführung wurde die Formel für den klassischen HALL-Effekt in einem Einteilchen-Bild hergeleitet. Verifizieren Sie noch einmal die Formel im Rahmen der DRUDE-Theorie des elektrischen Transports in Termen der inelastischen DRUDE-Impulsrelaxationszeit  $\tau$ .



2. Verifizieren Sie die Inversion des Leitfähigkeitstensors zum Widerstandstensor (das heißt: suche die inverse Matrix  $\varrho_{ij}$  von  $\sigma_{ij}$ ) und diskutieren Sie den Fall sehr hoher Magnetfelder.
3. Schätzen Sie die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$  und die elektrische Feldstärke  $F_s$  an der Grenzfläche einer GaAs-Al<sub>0.3</sub>Ga<sub>0.7</sub>As-Heterostruktur ab, die sich durch eine Bandkantendiskontinuität von 300 meV auszeichnet.
4. Für ein unendlich hohes Kastenpotential der Breite  $L$  ergeben sich die Energieeigenwerte (mit  $m_z$  als effektive Masse der Ladungsträger in z-Richtung)

$$E_j = \frac{\hbar^2 k_j^2}{2m_z}, \quad k_j = \pi \frac{j+1}{L}, \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (251)$$

das heißt als

$$E_j = \frac{h^2(j+1)^2}{2m_z L^2}, \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (252)$$

Für ein Dreieckpotential ergeben sich die Energieeigenwerte näherungsweise als

$$E_j \approx \left( \frac{\hbar^2}{2m_z} \right)^{1/3} \left[ \frac{3\pi e F_s}{2} \left( j + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3}, \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (253)$$

Berechnen Sie mit der elektrischen Feldstärke  $F_s$  aus Aufgabe 3 und  $m_z = 0.07 m_0$  die Subbandenergien  $E_0$  und  $E_1$ .

5. Sei  $m_x = m_y = 0.07 m_0$ .<sup>16</sup> Berechnen Sie die FERMI-Energie  $E_F$  für

$$n = 3 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}. \quad (254)$$

Wieviele Subbänder sind bei  $T = 0 \text{ K}$  und der 2-dimensionalen Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$  aus Aufgabe 3 besetzt?

6. Machen Sie sich mit der expliziten Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung im konstanten äußeren Magnetfeld vertraut [44]. Was geschieht im Falle einer VOGT-Geometrie und in Falle eines schrägen (engl. *tilted*) Magnetfeldes (qualitativ) [16]?
7. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf von  $\varrho_{xx}$  und  $\varrho_{yx}$  als Funktion des Magnetfeldes für folgende Fälle:

---

<sup>16</sup>Die effektive Masse kann in verschiedene Richtungen verschiedene Werte annehmen.

- (a) klassischer Grenzfall;
- (b)  $T = 0$  ohne lokalisierte Zustände;
- (c)  $T = 0$  mit lokalisierten Zuständen.

Kennzeichnen Sie auf der Magnetfeldachse bei b) und c) die Stelle  $\mu B = 1$ .

8. Erklären Sie das Prinzip der Lock-In-Meßtechnik, und entwerfen Sie einen Aufbau für das HALL-Experiment.

## 5.2 Experiment

Das Experiment sollte in etwa wie folgt ablaufen:

1. Zusammen mit dem Assistenten machen sich die Studenten mit der Meßapparatur vertraut (Helium-Kanne bzw. Helium-Kryostat, Heliumgas-Rückführleitungssystem, Magnet und Netzgerät, Probenhalter, HALL-Bar und seine Geometrie etc.).
2. Sodann wird der Probenhalter mit der Probe beladen und in die Helium-Kanne vorsichtig (!) eingebracht.
3. Die Messungen sind zunächst bei der Temperatur des flüssigen Heliums unter Normaldruck durchzuführen und mehrmals zu wiederholen.
4. Mit Hilfe des vom Autor ersonnenen „VON KLITZING izer“, einem Steckfeld bestehend aus einer Kollektion von Wendelpotis, die auf die Werte der quantisierten HALL-Widerstände justiert sind, prüfe man das grundsätzliche Funktionieren der Meßeinrichtung. So können grobe Fehler ausgeschlossen werden.
5. Erst jetzt wird begonnen, den Gasdruck über dem flüssigen He-Spiegel langsam zu abzusinken („Abpumpen“).
6. Während dieses Abpumpens soll sowohl  $\varrho_{yx}$  als auch  $\varrho_{xx}$  mehrfach in  $B$ -sweeps gemessen werden, um die Temperaturabhängigkeit zu studieren.
7. Nachdem die niedrigstmögliche Temperatur erreicht ist, werden die Messungen wiederholt.
8. Sodann wird die Probe durch die eingebaute LED mit IR-Lichtblitzen unterschiedlicher Dauer beleuchtet. Die Messungen sind zu wiederholen, um den Einfluß der Beleuchtung zu studieren. Es soll analysiert werden, wie sich das Verhalten der Probe nach Belichtung im Laufe der Zeit ändert. Dazu ist es notwendig, die Messungen noch mehrfach zu wiederholen (typ. 10 sec., 2 min., 20 min., 2 h nach Beleuchtung).
9. Die abschließenden Messungen von  $\varrho_{yx}$  und  $\varrho_{xx}$  werden am darauffolgenden Tag durchgeführt.

10. (*Fakultativ:*) Während des Versuchs gibt es Totzeiten. Diese sollen nicht nur genutzt werden zur Diskussion der Theorie des Effektes, sondern auch - wenn möglich - zur Hospitation an der MBE-Anlage der Arbeitsgruppe während des Wachsens einer Probe („wachsen“ hier verstanden als transitives Verb), die Sie selbst am zweiten Tag kontaktieren und messen dürfen.

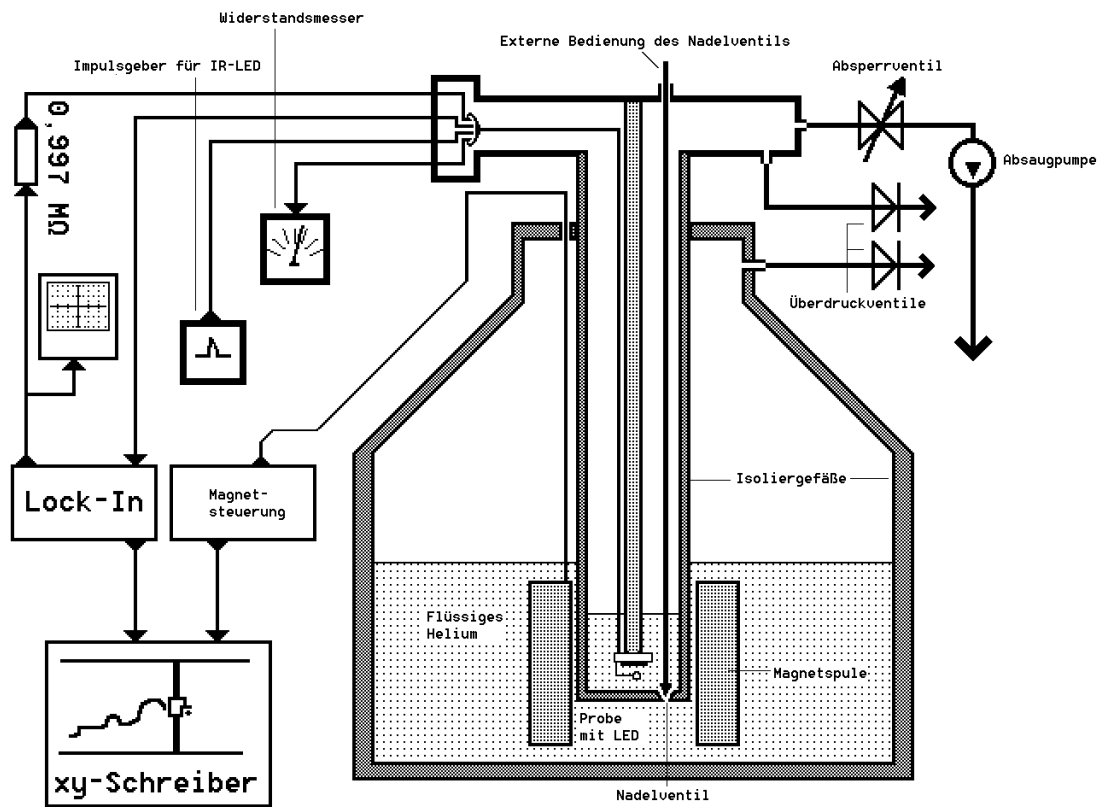


Abbildung 22: Helium-Kanne (schematisch) [27]

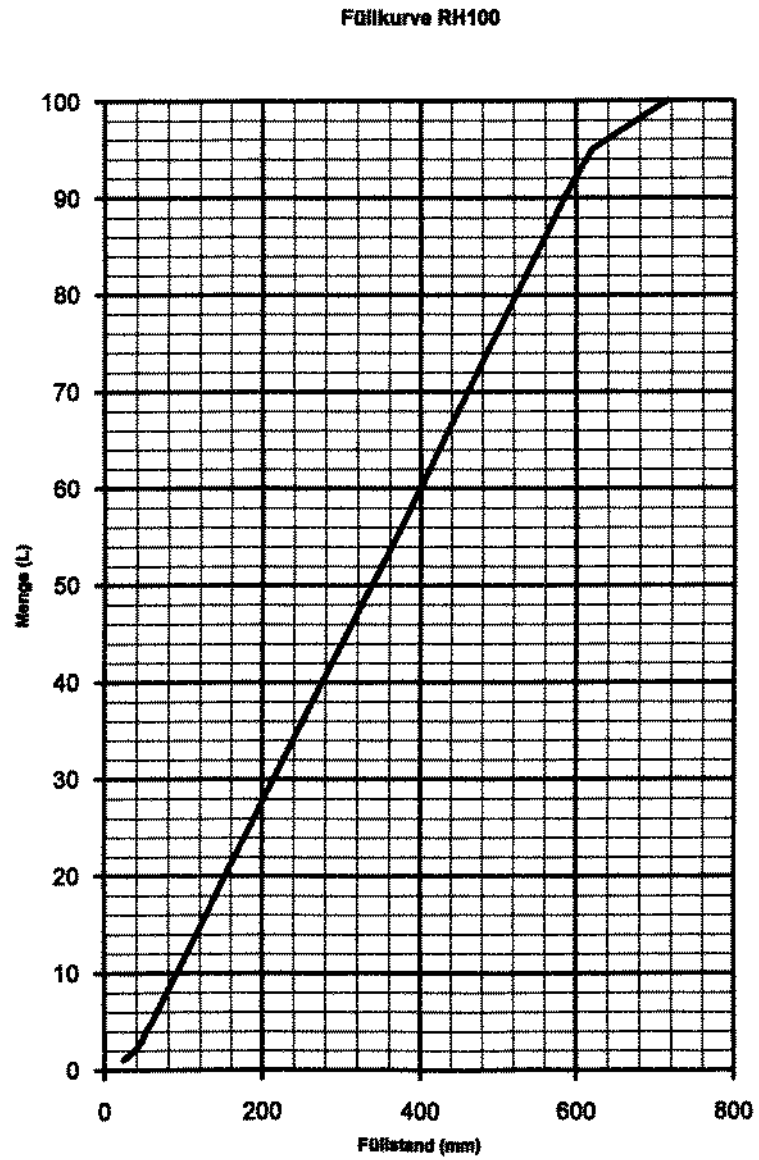


Abbildung 23: Füllkurve der Helium-Kanne

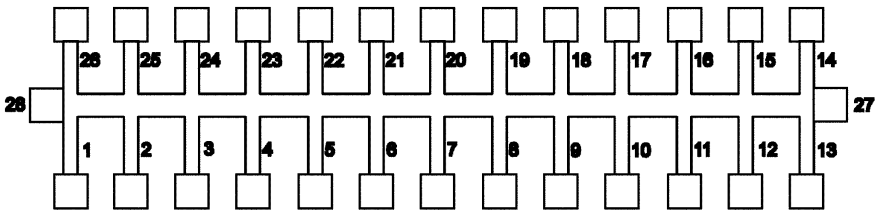


Abbildung 24: HALL-Streifen (Skizze)

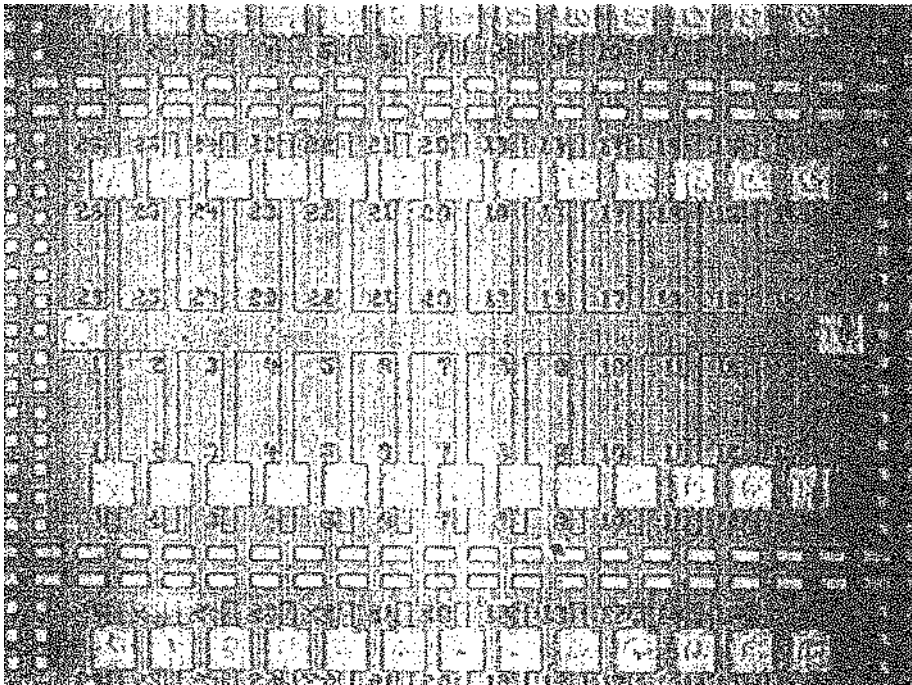


Abbildung 25: HALL-Streifen (Photo)

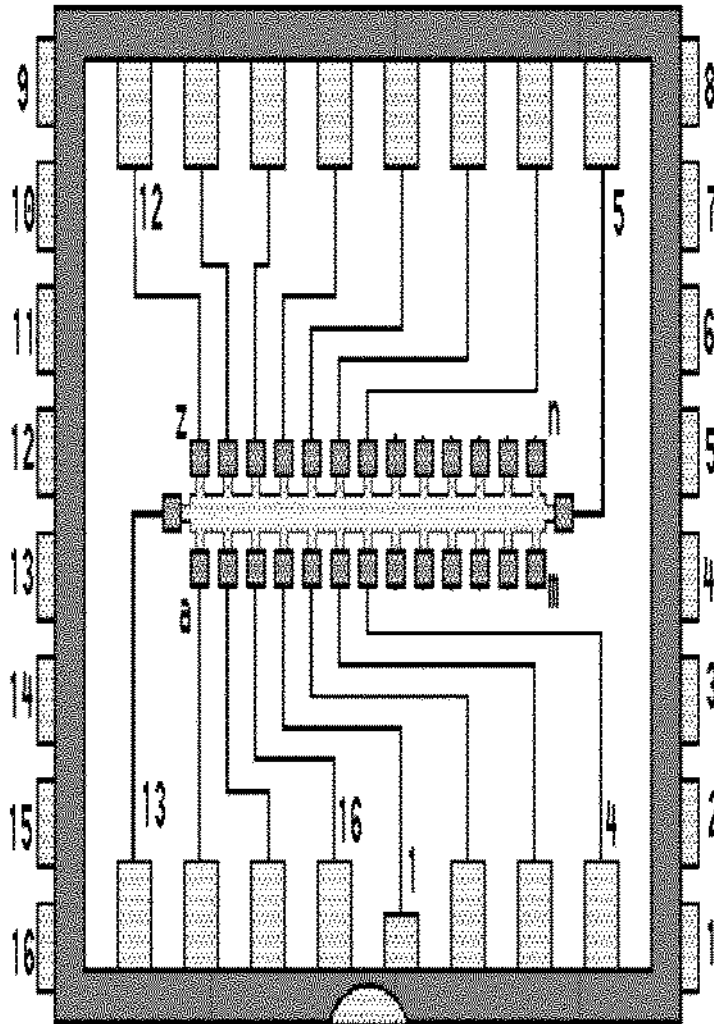


Abbildung 26: Bondplan für die HALL-Probe (schematisch) [27]

### 5.3 Auswertung

Wenn Sie Schritt für Schritt die folgenden Punkte durchgehen, dürfte die Auswertung Ihnen keine besonderen Probleme bereiten. Halten Sie sich daher bitte an das folgende *Curriculum*:

1. Machen Sie sich eine Zeichnung der HALL-Probe und tragen Sie in diese ein, in welcher Richtung der Strom fließt, in welcher Richtung das Magnetfeld wirkt und wo welche Spannungen abgegriffen werden.
2. Machen Sie sich eine Zeichnung Ihrer Verschaltung (Lock-In-Verstärker, Trenntrafo, Vorwiderstand, XY-Schreiber) und tragen Sie in diese ein, wo welcher Strom fließt und wo welche Spannung anliegt.
3. Machen Sie eine Bestandsaufnahme der Bereichseinstellungen der verwendeten Geräte (Lock-In-Verstärker, XY-Schreiber). Bereiten Sie Ihre Graphen so auf, daß alle Achsen beschriftet sind.
4. Bestimmen Sie die in Abwesenheit eines Magnetfeldes vorliegende Leitfähigkeit  $\sigma_0$  aus dem über den Vorwiderstand in die Probe injizierten Strom und der gemessenen Spannung:

$$\sigma_0 = \frac{j_x}{E_x} = \frac{I_x}{U_y}. \quad (255)$$

5. Bestimmen Sie  $\varrho_{xx}$  (klassisch gegeben durch  $m/n_{2D}e^2\tau$ ) und  $\varrho_{yx}$  (klassisch gegeben durch  $B/n_{2D}e$ ) als Funktion des Magnetfeldes aus den von Ihnen aufgenommenen Meßkurven.

*Hinweis:* Auf dem XY-Schreiber können Sie die gemessenen Spannungen direkt ablesen, wenn Sie alle Umrechnungsfaktoren aus den Regler- und Bereichseinstellungen berücksichtigen. Es ist

$$R_H = \frac{U_y}{I_x} = \frac{h}{\nu e^2}. \quad (256)$$

Um herauszufinden, bei welchem  $\nu$  man jeweils liegt, trägt man entsprechend der Relation

$$\frac{1}{R_H} = \nu \cdot \frac{e^2}{h} = \frac{e n_{2D}}{B} \quad (257)$$



die Kehrwerte der gemessenen Plateau-Widerstände gegen  $1/B$  auf. Man sieht sofort, daß die einzelnen inversen Widerstandsstufen einen konstanten Abstand haben und kann sogleich die Frage beantworten, welches die kleinste Stufe für den inversen HALL-Widerstand ist.

6. Extrapolieren Sie auf die Magnetfeldstärke, bei welcher der Füllfaktor  $\nu = 1$  erreicht ist.

7. Bestimmen Sie die Elektronendichte nach drei verschiedenen Methoden:

(a) klassisch aus der Steigung der gemittelten Kurve entsprechend der Beziehung

$$n_{2D} = \frac{B}{\varrho_{yx} e}; \quad (258)$$

(b) aus den Plateaux des quantisierten HALL-Effektes, das heißt, aus den Plateaux von  $\varrho_{yx}$  und den ermittelten Füllfaktoren  $\nu$ , entsprechend der Beziehung

$$n_{2D} = \frac{B}{\left(\frac{h}{\nu e^2}\right) e} = \frac{\nu e B}{h}; \quad (259)$$

(c) aus den SHUBNIKOV-DE HAAS-Oszillationen. Tragen Sie dabei  $1/B_i$  als Funktion ganzer Zahlen  $i$  auf und identifizieren Sie die Minima von  $\varrho_{xx}$  mit dem zugehörigen LANDAU-Niveau-Index  $i$  bzw. Füllfaktor  $\nu$ .

Vergleichen Sie die drei unabhängigen Resultate inklusive einer Fehlerabschätzung (!). Decken sich die Werte?

8. Berechnen Sie die Beweglichkeit

$$\mu = \frac{e\tau}{m} \quad (260)$$

und die DRUDE-Impulsrelaxationszeit  $\tau$ , aus  $\sigma_0$  und der von Ihnen bestimmten 2-dimensionalen Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$ . Vergleichen Sie  $\tau$ ,  $\mu$  und  $m$  mit typischen Werten für einen 3-dimensionalen Halbleiter und für ein Metall bei 4.2 K.

9. Berechnen Sie die FERMI-Energie  $E_F$  aus der 2-dimensionalen Zustandsdichte  $D_{2D}(E)$  und 2-dimensionalen Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$ .

10. Bestimmen Sie  $h/e^2$  aus dem HALL-Plateau mit dem kleinsten Index  $i$ .
11. Mit der Beleuchtung der Probe haben Sie die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$  in der Probe erhöht. Was ist dabei der relevante physikalische Mechanismus? Die Beleuchtung bleibt erhalten, auch wenn das Licht ausgeschaltet wird, solange die Probe nicht erwärmt wird. (Dieses Phänomen hängt mit den sogenannten DX-Zentren<sup>17</sup> in  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  zusammen, die sich durch die Si-Dotierung bilden, sowie mit Tunnelprozessen im allgemeinen.) Bestimmen Sie die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte  $n_{2D}$  und die Beweglichkeit  $\mu$  nach Abschalten der Beleuchtung  $t=0$ . Tragen Sie dazu beide Größen gegen  $\log t$  auf. Beantworten Sie durch Extrapolation der Daten die Frage: Wie lange müßten wir warten, bis sich der Zustand vor Beleuchtung wieder eingestellt hat?
12. Die inverse SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante ist - unabhängig von den Einheiten - gegeben durch

$$\alpha^{-1} = (h/e^2)(2/\mu_0 c) = 137,036 \dots, \quad (261)$$

wobei wir für die Permeabilität des Vakuums

$$\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \text{ Hm} \quad (262)$$

und für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c = 2.9979 * 10^8 \text{ m/s} \quad (263)$$

angesetzt haben. Berechnen Sie diese aus dem Meßwert für die VON KLITZING-Konstante

$$R_{vK} = \frac{h}{e^2}. \quad (264)$$

13. Diskutieren Sie die Rolle der Temperatur für das Auftreten des quantisierten HALL-Effektes. Vergleichen Sie dabei  $kT$  mit den charakteristischen Energien des Systems, nämlich

---

<sup>17</sup>DX steht für *donor complex*, siehe z. B. [48].

- der FERMI-Energie  $E_F$ ,
- der LANDAU-Aufspaltung  $\hbar\omega_c$ ,
- der Breite der ausgedehnten Zustände  $\hbar/\tau$ .

14. (*Fakultativ:*) Zeichnen Sie die Äquipotentiallinien und die Strompfade bei einer HALL-Geometrie in einem HALL-Plateau.
15. (*Fakultativ:*) Warum tritt der quantisierte HALL-Effekt nicht in einem 3-dimensionalen Elektronengas auf? Wie können Sie sich experimentell den Übergang (engl. *crossover*) von  $2D$  nach  $3D$  vorstellen (Hinweis: Multilayer)?

## 6 Anhang: Physikalische Formelsammlung

Nach [8].

Alle Größen sind Näherungsgrößen, wenn es nicht ausdrücklich anders angegeben ist.

$$a = 0.815 (10) \quad (265)$$

bedeutet, daß mit 70 % „*confidence level*“ der wahre Wert zwischen 0.805 und 0.825 liegt.

Alle Größen sind in SI-Einheiten angegeben, wenn es nicht ausdrücklich anders spezifiziert wird.<sup>18</sup>

### 6.1 Allgemeine Physik

#### 6.1.1 Naturkonstanten

BOLTZMANN-Konstante

$$k = 1.380\,658\,(12) \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (266)$$

PLANCKsches Wirkungsquantum

$$h = 6.626\,075\,5\,(40) \times 10^{-34} \text{ Js} \quad (267)$$

Mit

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (268)$$

ist

$$\begin{aligned} \hbar &= 1.054\,576\,6\,(63) \times 10^{-34} \text{ Js} \\ &= 6.582\,122\,0\,(20) \times 10^{-22} \text{ MeV s} \end{aligned} \quad (269)$$

---

<sup>18</sup>Die Idee, die Formeln in dieser Weise zusammenzustellen, geht zwar nicht auf A.D. WIECK zurück; aber er war es, der auf die Idee kam, sich eine kleine Karte anzufertigen, die er in das Etui seines wissenschaftlichen Taschenrechners CASIO FX-50F, welcher zudem die Naturkonstanten festverdrahtet hat, hineinschieben konnte. DIRK DE VRIES hat die Formelsammlung weiter verbessert. Die vorliegende Version enthält zusätzlich noch einige weitere, für die Praxis nützliche Fakten. Ähnliche Formelsammlungen - zugeschnitten auf die Anwendung innerhalb der experimentellen Festkörperphysik - findet man an vielen Stellen, zum Beispiel auch in der „Bibel“ von ANDO, FOWLER und STERN [4].

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum (exakter Wert)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (270)$$

NEWTONsche Gravitationskonstante

$$\begin{aligned} G_N &= 6.672\,59\,(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \\ &= 6.707\,11\,(86) \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2} \end{aligned} \quad (271)$$

### 6.1.2 Eigenschaften von Elementarteilchen

Elektrische Elementarladung

$$e = 1.602\,177\,33\,(49) \times 10^{-19} \text{ C} \quad (272)$$

Elektronenmasse

$$\begin{aligned} m_e &= 9.109\,389\,7\,(54) \times 10^{-31} \text{ kg} \\ &= 0.510\,999\,06\,(15) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (273)$$

Protonenmasse

$$\begin{aligned} m_p &= 1.672\,623\,1\,(10) \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 938.272\,31\,(28) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (274)$$

Neutronenmasse

$$\begin{aligned} m_n &= 1.674\,928\,6\,(10) \times 10^{-27} \text{ kg} \\ &= 939.565\,63\,(28) \text{ MeV}/c^2 \end{aligned} \quad (275)$$

### 6.1.3 Quantisierter Hall Effekt

VON KLITZING-Konstante

$$R_{vK} = \frac{h}{e^2} = 25.812\,805 \dots \text{ k}\Omega \quad (276)$$

$h/e^2$	25.812 805 ... k $\Omega$
$h/2e^2$	12.906 402 ... k $\Omega$
$h/3e^2$	8.604 268 ... k $\Omega$
$h/4e^2$	6.453 201 ... k $\Omega$
$h/5e^2$	5.162 561 ... k $\Omega$
$h/6e^2$	4.302 134 ... k $\Omega$
$h/7e^2$	3.687 543 ... k $\Omega$
$h/8e^2$	3.226 600 ... k $\Omega$

Tabelle 2: Quantisierte HALL-Widerstände

#### 6.1.4 Energie versus Frequenz versus Temperatur etc.

$$E = eU = \frac{hc}{\lambda} = h\nu = \hbar\omega = kT \quad (277)$$

Um ein Gefühl für Größenordnungen zu bekommen, sei ein Blick in die beigegefügte Tabelle empfohlen.- Ferner ist es manchmal nützlich, die folgenden Beziehungen zu kennen:

$$1 \text{ J} = 6.241 \dots \times 10^{18} \text{ eV} \quad (278)$$

$$h = 4.136 \dots \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \quad (279)$$

$$1 \text{ kg} = 0.8988 \dots \times 10^{17} \text{ J} / c^2 = 5.609 \dots \times 10^{35} \text{ eV} / c^2 \quad (280)$$

$$1 \text{ eV} = 1.602 177 33 (49) \times 10^{-19} \text{ J} \quad (281)$$

$$1 \text{ eV} / c^2 = 1.782 662 70 (54) \times 10^{-36} \text{ kg} \quad (282)$$

#### 6.1.5 Elektrodynamik

Magnetische Vakuum-Permeabilität („Nachgiebigkeit“)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 12.566 370 614 \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (283)$$

$eU$	$\nu$	$T$
<b>1 eV</b>	242 THz	11 600 K
<b>1 meV</b>	242 GHz	11.6 K
<b>1 <math>\mu</math>eV</b>	242 MHz	11.6 mK
26 meV	6.24 THz	<b>300 K</b>
86 $\mu$ eV	20.8 GHz	<b>1 K</b>
8.6 $\mu$ eV	2.08 GHz	<b>100 mK</b>
0.86 $\mu$ eV	208 MHz	<b>10 mK</b>
86 neV	20.8 MHz	<b>1 mK</b>

Tabelle 3: Beispiele für Energie versus Frequenz versus Temperatur etc.

Elektrische Vakuum-Permittivität („Durchlässigkeit“)

$$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (284)$$

### 6.1.6 Geophysikalische Konstanten

Nomineller atmosphärischer Druck auf der Erdoberfläche

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (285)$$

Historische Einheit für den Druck

$$1 \text{ Torr} = (1/760) \text{ atm} = 133.322 \dots \text{ N/m}^2 \quad (286)$$

Nominelle Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche

$$g = 9.80665 \text{ m/s}^2 \quad (287)$$

### 6.1.7 Thermodynamik der Hohlraumstrahlung

STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz:

$$\int_0^\infty F(\lambda) d\lambda = \sigma T^4 \quad (288)$$

mit

$$\sigma = 5.6697 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \quad (289)$$

Leistung der Strahlung eines schwarzen Körpers

$$P(\text{pW}) = 5.67 A(\text{cm}^2) \cdot b \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (290)$$

wobei

$$\begin{aligned} b &= 1.00 && \text{für ideal schwarzen Körper} \\ b &= 0.05 && \text{für poliertes Metall} \end{aligned} \quad (291)$$

WIENSches Verschiebungsgesetz

$$\lambda_{Pmax} \cdot T = \text{const} \quad (292)$$

insbesondere haben wir

$$\lambda_{Pmax} = \frac{2898 \mu\text{m}}{T} \quad (293)$$

### 6.1.8 Atomphysik

Elektronenmasse

$$m_e = 9.109\,389\,7(54) \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (294)$$

BOHRscher Atomradius

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\epsilon \hbar^2}{2\pi m_e e^2} = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (295)$$

RYDBERG-Konstante

$$1 \text{ Ry} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2a_0} = \frac{e^4 m_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = 13.61 \text{ eV} \quad (296)$$

BOHRsche Energieniveaus im Atom

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e a_0^2} \quad (297)$$



### 6.1.9 Molekülphysik

AVOGADRO-Konstante

$$N_{Avo} = 6.022045 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \quad (298)$$

## 6.2 Physik der Halbleiter, insbesondere GaAs

### 6.2.1 Galliumarsenid

“built-in potential” in GaAs

$$V_{bi} = 1.24 \text{ V} \quad (299)$$

Dielektrische Konstante im Vakuum versus dielektrische Konstante in GaAs

$$\varepsilon_* := \varepsilon_{\text{GaAs}} = 13.1 \varepsilon_0 \quad (300)$$

Elektronenmasse versus effektive Elektronenmasse

$$m_e = 0.910 \dots \times 10^{-30} \text{ kg} \quad (301)$$

$$m_e^* = 0.637 \dots \times 10^{-31} \text{ kg} = 0.07 m_e \quad (302)$$

BOHRscher Atomradius versus künstlichem BOHRschen Atomradius

$$a_0 = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\varepsilon_0 \hbar^2}{2\pi m_e e^2} = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (303)$$

$$a_0^* = 4\pi\varepsilon_* \cdot \frac{\hbar^2}{m_e^* e^2} = \frac{\varepsilon_* \hbar^2}{2\pi m_e^* e^2} = 9.90 \text{ nm} = \frac{13.1}{0.07} a_0 \quad (304)$$

RYDBERG-Konstante versus effektive RYDBERG-Konstante

$$1 \text{ Ry} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2a_0} = \frac{e^4 m_e}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = 13.61 \text{ eV} \quad (305)$$

$$1 \text{ Ry}^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0^*} \cdot \frac{e^2}{2a_0^*} = \frac{e^4 m_e^*}{(4\pi\varepsilon_0^*)^2 \hbar^2} = 5.552 \text{ meV} = \frac{0.07}{(13.1)^2} \text{ Ry} \quad (306)$$

### 6.2.2 Energieniveaus im Kastenpotential

Diese Beziehung ist wichtig für *quantum wells* etc.

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2}{8m_e^* a_0^{*2}} = 5377 \text{ meV} \cdot n^2 / a \text{ (nm)}^2 \quad (307)$$

### 6.2.3 Zustandsdichten und Fermi-Energien

Zustandsdichte

$$D_{nD} = \frac{\text{Zustandsdichte in } n \text{ Raumdimensionen incl. Spin}}{m^n} \quad (308)$$

wobei

$$D_{3D}(E) = \frac{8\pi m \sqrt{2mE}}{h^3} \quad (309)$$

$$D_{2D}(E) = \frac{4\pi m}{h^2} \quad (310)$$

$$D_{1D}(E) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad (311)$$

FERMI-Energie

$$E_{F_3} = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3n_{3D}}{\pi} \right)^{2/3} = 52.1 \text{ meV} \cdot \left( n_{3D}(10^{18} \text{ cm}^{-3}) \right)^{2/3} \quad (312)$$

$$E_{F_2} = \frac{h^2 n_{2D}}{4\pi m} = 34.2 \text{ meV} \cdot \left( n_{2D}(10^{12} \text{ cm}^{-2}) \right) \quad (313)$$

$$E_{F_1} = \frac{h^2 n_{1D}^2}{32m} = 13.43 \text{ meV} \cdot \left( n_{1D}(10^6 \text{ cm}^{-1}) \right)^2 \quad (314)$$

$$(315)$$

FERMI-Wellenlänge

$$\lambda_{F_3} = 2 \sqrt[3]{\frac{\pi}{3n_{3D}}} \quad (316)$$

$$\lambda_{F_2} = \sqrt{\frac{2\pi}{n_{2D}}} \quad (317)$$

$$\lambda_{F_1} = \frac{4}{n_{1D}} \quad (318)$$

### 6.2.4 Ladungstransport im klassischen Regime

$n$ -dimensionale Ladungsträgerdichte

$$n_{nD} = \frac{\text{Anzahl der Ladungsträger}}{n\text{-dimensionales Volumen}} \quad (319)$$

Spezifischer Widerstand (Resistivität) in  $n$  Raumdimensionen

$$\varrho_n = R \cdot \frac{n-1\text{-dimensionale Querschnittsfläche}}{1\text{-dimensionale Länge}} = \frac{1}{e\mu n_{nD}} \quad (320)$$

Beweglichkeit in  $n$  Raumdimensionen

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\text{mittlere Driftgeschwindigkeit}}{\text{angelegte elektrische Feldstärke}} \\ &= \frac{1}{e} \cdot \frac{n\text{-dimensionale Leitfähigkeit}}{n\text{-dimensionale Ladungsträgerdichte}} = \frac{1}{e\varrho_n n_{nD}} \end{aligned} \quad (321)$$

Elastischer mittlerer freier Weg

$$l_{3D} = \frac{\mu h}{2e} \sqrt[3]{\frac{3n_{3D}}{\pi}} = 203.6 \text{ nm} \cdot \mu \cdot \sqrt[3]{n_{3D} (10^{18} \text{ cm}^{-3})} \quad (322)$$

$$l_{2D} = \frac{\mu h}{e} \sqrt{\frac{n_{2D}}{2\pi}} = 165.0 \text{ nm} \cdot \mu \cdot \sqrt{n_{2D} (10^{12} \text{ cm}^{-2})} \quad (323)$$

$$l_{1D} = \frac{\mu h}{4e} n_{1D} = 103.4 \text{ nm} \cdot \mu \cdot n_{1D} (10^6 \text{ cm}^{-1}) \quad (324)$$

DRUDE-Relaxationszeit

$$\tau = \frac{m}{e} \cdot \mu = 398 \text{ fs} \cdot \mu \quad (325)$$

$\mu(\text{cm}^2(\text{Vs})^{-1})$	Qualität der Probe
200 000	immerhin
600 000	gut
1 000 000	sehr gut
2 000 000	exzellent
10 000 000	Weltspitze (1/2 Jahr ausheizen usw.)

Tabelle 4: Probenqualitäten in Termen ihrer Beweglichkeit

### 6.2.5 Hall-Messungen nach van der Pauw

Wir setzen eine quadratische Geometrie der Probe voraus, die wir an ihren vier Ecken kontaktieren. Dann erhalten wir im klassischen Regime nach VAN DER PAUW [57]:

2-dimensionale Ladungsträgerdichte

$$n_{2D} = \frac{BI}{eV_H} \quad (326)$$

Beweglichkeit in 2 Raumdimensionen

$$\mu = \frac{1}{en_{2D}e} = \frac{\ln 2}{\pi} \frac{I}{V} \frac{1}{n_{2D}e} = \frac{\ln 2}{\pi} \frac{V_H}{V} \frac{I}{n_{2D}eV_H} = \frac{\ln 2}{\pi} \frac{V_H}{VB} = 0.2206 \frac{V_H}{VB} \quad (327)$$

Umrechnung von Laboreinheit auf SI

$$\mu(\text{cm}^2(\text{Vs})^{-1}) = 10\,000 \cdot \mu(\text{m}^2(\text{Vs})^{-1}) = 10\,000 \cdot \mu \quad (328)$$

### 6.2.6 Gated 2DEG

Mit  $V_g$  als Gate-Spannung und  $d$  als isolierender Dicke ist die 2-dimensionale Ladungsträgerdichte in GaAs

$$n_{2D} = \frac{\varepsilon_* V_g}{ed} = 72.4 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} V_g(V)/d(\text{nm}) \quad (329)$$

### 6.2.7 Elektronen im Magnetfeld

Zentralkraft versus LORENTZ-Kraft

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad (330)$$

Zyklotronfrequenz

$$m\omega^2 r = e \cdot \omega r \cdot B, \quad \text{daraus: } \omega_c := \omega = \frac{eB}{m} \quad (331)$$

klassischer magnetischer Radius

$$r_{class} = \frac{mv^2}{evB} = \frac{\sqrt{2m \cdot mv^2/2}}{eB} = \frac{\sqrt{2mE}}{eB} = 28.21 \text{ nm} \cdot \sqrt{E \text{ (meV)}} / B \quad (332)$$

magnetische Länge<sup>19</sup>

$$l_B = \frac{\sqrt{2m\hbar\omega_c/2}}{eB} = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}, \quad 2\pi \cdot l_B^2 = \frac{h}{eB} \quad (333)$$

Wegen  $n_{2D} = \nu \cdot eB/h$  ist

$$\nu = \frac{n_{2D} h}{eB} = 41.36 \cdot \frac{n_{2D} (10^{12} \text{ cm}^{-2})}{B} \quad (334)$$

Der quantenmechanische magnetische Radius

$$r_{quant} = \sqrt{\frac{\hbar(\nu+1)}{2\pi eB}} = 25.656 \text{ nm} \cdot \sqrt{\frac{\nu+1}{B}} \quad (335)$$

erfüllt näherungsweise

$$r_{quant} \approx \frac{h}{eB} \sqrt{\frac{n_{2D}}{2\pi}} = 165 \text{ nm} \cdot \sqrt{n_{2D} (10^{12} \text{ cm}^{-2})} / B \quad (336)$$

Zyklotronenergie

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar eB}{m} = 1.654 \text{ meV} \cdot B \quad (337)$$

### 6.2.8 Verarmung (Depletion)

Verarmungslänge (*depletion length*)

$$l_{depl} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{en_{3D}} \left( V_{bi} - \frac{2kT}{e} \right)} \approx \frac{1.31 \mu\text{m}}{\sqrt{n_{3D} (10^{15} \text{ cm}^{-3})}} \quad (338)$$

Das heißt: Für eine geringe Dotierung von  $10^{15} \text{ cm}^{-3}$  beträgt sie typischerweise  $1 \mu\text{m}$ , für eine große Dotierung einige  $\text{nm}$ .

---

<sup>19</sup>Radius der Zyklotron-„Nullpunktsbahn“ entsprechend der Nullpunktsenergie  $E = \hbar\omega_c/2$ . *Vorsicht:* Semiklassisch zu denken, kann in die Irre führen!

### 6.3 Mesa-Ätze für GaAs

Zur Präparierung bzw. Strukturierung eines HALL-Streifens (*engl.* HALL bar) muß man die Parameter kennen, die für das Herausätzen eines *Mesas* (*in Alaska*: Tafelberg) entscheidend sind.

$$1 \text{ Teil H}_2\text{SO}_4 : 8 \text{ Teile H}_2\text{O}_2 : 1000 \text{ Teile H}_2\text{O} \quad (339)$$

ätzen

$$150 \text{ nm} \quad \text{in} \quad 3.5 \text{ min} \quad (340)$$

### 6.4 Weitere nützliche Formeln

$$\begin{aligned} \frac{k}{k'} &\approx 0.737 \log \left( \frac{0.1}{1 - \frac{a}{b}} \right) + 1.384, \\ &= 0.647 - 0.737 \log \left( 1 - \frac{a}{b} \right), \quad 0.7 < \frac{a}{b} < 1 \end{aligned} \quad (341)$$

$$\frac{k}{k'} \approx 0.844 \frac{a}{b} + 0.36, \quad 0.1 < \frac{a}{b} < 0.7 \quad (342)$$

$$\frac{k}{k'} \approx -\frac{0.57}{\log \frac{a}{b}} = \frac{0.57}{\log \frac{b}{a}}, \quad 0 < \frac{a}{b} < 0.01 \quad (343)$$

All quantities in SI, unless specified otherwise	
$D_n$ = $n$ -dimens.density of states/m <sup>n</sup> incl.spin	
$m$ =effective charge carrier mass, here 0.07 $m_e$	
$\epsilon$ =dielectric constant, here 13.1 $\epsilon_o$	
$V_{bi}$ =built-in potential, here 1.24 V	$a_o$ =Bohr's radius
$l_n$ = $n$ -dimens.elast.mean free path $\tau$ =momen.scatt.time	
$N_n$ = $n$ -dimens. carrier density	$E$ =energy
$\mu$ =charge carrier mobility	$E_F$ =Fermi-energy
$\varrho_n$ = $n$ -dimens. resistivity	$\lambda$ =wavelength
$T$ =temperature	$\epsilon_o = 8.854188 \times 10^{-12}$ F/m
$l_{depl}$ =depletion length	$V_g$ =gate voltage
$r_{class}$ =classical magnetic length	$B$ =magnetic field
$r_{quant}$ =quant.mech.magn.length	$A$ =area
$\nu$ =2-dimens.spin-split filling factor	$d$ =insulat.thickness
$\omega_c$ =cyclotron frequency	$e$ =electron charge
$P$ =black body radiation power	$h$ =Planck's quantum
$b$ =black body coeff: 1 (black) ... 0.05 (pol.metal)	
$N_2 = \frac{\epsilon V_g}{ed} = 72.4 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} V_g(\text{V})/d(\text{nm})$	
$D_1 = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2m}{E}} \quad D_2 = \frac{4\pi m}{h^2} \quad D_3 = \frac{8\pi m \sqrt{2mE}}{h^3}$	
$E_{F1} = \frac{32m}{h^2 N_1} = 13.43 \text{ meV } (N_1(10^6 \text{ cm}^{-2}))^2$	
$E_{F2} = \frac{h^2 N_2}{4\pi m} = 34.2 \text{ meV } N_2(10^{12} \text{ cm}^{-2})$	
$E_{F3} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N_3}{\pi}\right)^{2/3} = 52.1 \text{ meV } (N_3(10^{18} \text{ cm}^{-3}))^{2/3}$	
$\lambda_{F1} = \frac{4}{N_1} \quad \lambda_{F2} = \sqrt{2\pi/N_2} \quad \lambda_{F3} = 2 \sqrt[3]{\frac{\pi}{3N_3}}$	
$l_1 = \frac{\mu h}{4e} N_1 = 103.4 \text{ nm } \mu N_1(10^6 \text{ cm}^{-1}) \quad \varrho_n = \frac{1}{e\mu N_n}$	
$l_2 = \frac{\mu h}{e} \sqrt{\frac{N_2}{2\pi}} = 165 \text{ nm } \mu \sqrt{N_2(10^{12} \text{ cm}^{-2})}$	
$l_3 = \frac{\mu h}{2e} \sqrt[3]{\frac{3N_3}{\pi}} = 203.6 \text{ nm } \mu \sqrt[3]{N_3(10^{18} \text{ cm}^{-3})}$	
$l_{depl} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{eN_3} (V_{bi} - \frac{2kT}{e})} \approx \frac{1.31 \mu\text{m}}{\sqrt{N_3(10^{15} \text{ cm}^{-3})}}$	
$r_{class} = \frac{\sqrt{2mE}}{eB} = 28.21 \text{ nm } \sqrt{E(\text{meV})/B}$	
$r_{quant} \approx \frac{h}{eB} \sqrt{\frac{N_2}{2\pi}} = 165 \text{ nm } \sqrt{N_2(10^{12} \text{ cm}^{-2})}/B$	
$r_{quant} = \sqrt{\frac{h(\nu+1)}{2\pi eB}} = 25.656 \text{ nm } \sqrt{\frac{\nu+1}{B}}$	
$\nu = \frac{N_2 h}{eB} = 41.36 \frac{N_2(10^{12} \text{ cm}^{-2})}{B} \quad \tau = \frac{m}{e} \mu = 398 \text{ fs } \mu$	
$\hbar\omega_c = \frac{\hbar eB}{m} = 1.654 \text{ meV } B \quad a_o = \frac{\epsilon \hbar^2}{2\pi e^2 m} = 9.90 \text{ nm}$	
$P(\text{pW}) = 5.67 A(\text{cm}^2) b(T_1^4 - T_2^4) \quad \lambda_{Pmax} = \frac{2898 \mu\text{m}}{T}$	

Tabelle 5: Zum Kopieren und Ausschneiden: Vorderseite der Formelkarte

$$\begin{aligned}
k &= 1.380\,658(12) \times 10^{-23} \text{ J/K} \\
h &= 6.626\,0755(40) \times 10^{-34} \text{ Js} \\
c &= 2.997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s} \\
e &= 1.602\,177\,33(49) \times 10^{-19} \text{ C} \\
m_e &= 9.109\,534(54) \times 10^{-31} \text{ kg} \\
m_p &= 1.672\,6231(10) \times 10^{-27} \text{ kg} \\
m_n &= 1.674\,9286(10) \times 10^{-27} \text{ kg} \\
\mu_o &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} = 1.256\,637 \dots \times 10^{-6} \text{ H/m} \\
\varepsilon_o &= 1/\mu_o c^2 = 8.854\,1878 \dots \times 10^{-12} \text{ F/m} \\
1 \text{ atm} &= 1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \\
1 \text{ Torr} &= (1/760) \text{ atm} = 133.322 \dots \text{ N/m}^2 \\
g &= 9.80665 \text{ m/s}^2 \\
G &= 6.672\,59(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \\
N_{Avo} &= 6.022\,1367(36) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
\sigma &= 5.670\,51(19) \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{K}^{-4} \\
E_n &= \frac{\hbar^2 n^2}{8ma^2} \\
N_2 &= \frac{BI}{eV_H} \\
\mu &= \frac{\ln 2}{\pi} \frac{V_H}{VB} = 0.2206 \frac{V_H}{VB}
\end{aligned}$$

A.D. Wieck / D.K. de Vries / R.D.T. 1992-1997

Tabelle 6: *Zum Kopieren und Ausschneiden:* Rückseite der Formelkarte



## Literatur

- [1] R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2nd Edition, Fifth Printing with corrections, The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., Reading, Massachusetts (1985)
- [2] Y. AHARONOV, D. BOHM, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Phys. Rev. **115**, 485-491 (1959)
- [3] T. ANDO, Y. MATSUMOTO, Y. UEMURA, *Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System*, J. Phys. Soc. Jap. **39**, 279-288 (1975)
- [4] T. ANDO, A.B. FOWLER, F. STERN, *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437-637 (1982)
- [5] H. AOKI, *Quantised Hall effect*, Rep. Progr. Phys. **50**, 655-730 (1987)
- [6] H. ARAKI, D. KASTLER, M. TAKESAKI, R. HAAG, *Extension of KMS states and chemical potential*, Comm. Math. Phys. **53**, 97-134 (1977)
- [7] N.W. ASHCROFT, N.D. MERMIN, *Solid State Physics*, Everbest Printing Co. Ltd., Hong Kong (1976)
- [8] R.M. BARNETT *et al.*, *Particle Physics Booklett*, Phys. Rev. **D54**, 1 (1996)
- [9] W. BRENIG, *Quantized Hall conductance: Effect of random potentials*, Z. Phys. **B50**, 305-309 (1983)
- [10] M. BÜTTIKER, *Quantized transmission of a saddle-point constriction*, Phys. Rev. **B41**, 7906-7909 (1990)
- [11] J.L. CARDY and E. RABINOVICI, *Phase structure of  $Z(P)$  models in the presence of a theta parameter*, Nucl. Phys. **B205** (FS5) 1-16 (1982)
- [12] J.L. CARDY and E. RABINOVICI, *Duality and the theta parameter in abelian lattice models*, Nucl. Phys. **B205** (FS5) 17-26 (1982)

- [13] T. CHAKRABORTY, P. PIETILÄINEN, *The Fractional Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, Berlin (1988)
- [14] T. CHAKRABORTY and P. PIETILÄINEN, *The Quantum Hall Effects*, Springer-Verlag, Berlin (1995)
- [15] L.J. CHALLIS, *Physics in less than three dimensions*, Contemp. Phys. **33**, 111-127 (1992)
- [16] M. CLAUSNITZER, *Inversionselektronen in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern*, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik der Universität Hamburg (1995)
- [17] K. EFETOV, *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge University Press (1997)
- [18] W. EHRENBERG, R.E. SIDAY, *The refractive index in electron optics and the principles of dynamics*, Proc. Phys. Soc. (London) **B62**, 8-21 (1949)
- [19] W. FRANZ, *Elektroneninterferenzen im Magnetfeld*, Verh. DPG **2**, 65 (1939); Phys. Ber. **21**, 686 (1940)
- [20] J. FRÖHLICH, *Mathematical Aspects of the Quantum Hall Effect*, Preprint, ETH Zürich (1993)
- [21] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics. 2nd Edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts (1980)
- [22] H.J. GROENWOLD, *On the principles of elementary quantum mechanics*, Physica **12**, 405-460 (1946)
- [23] R. HAAG, *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras.* Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [24] J. HAJDU, B. KRAMER, *Der Quanten-Hall-Effekt*, Phys. Bl. **41**, 401-406 (1985)

- [25] J. HAJDU, *Ten Years of the Quantum Hall Effect: Development and Present State of the Theory*, in “High Magnetic Fields in Semiconductor Physics III”, Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [26] E.H. HALL, *On a new action of the Magnet on Electric Currents*, Amer. J. Math. **2**, 287-??? (1879) and Phil. Mag. **9**, 225-??? (1880)
- [27] A. HENSEL, K. ZENERINO, *Der quantisierte Hall-Effekt*, Praktikumsprotokoll vom 02.12.96. Der Autor ist für die Überlassung der Zeichnungen (die später noch von ihm bearbeitet wurden) dankbar.
- [28] M.A. HERMAN, H. SITTER, *Molecular Beam Epitaxy*, Springer Series in Materials Science 7, Springer-Verlag, Berlin (1989)
- [29] T. IGARASHI, J. WAKABAYASHI, S. KAWAJI, *Hall effect in silicon inversion layers under strong magnetic fields*, J. Phys. Soc. Japan **38**, 1549 (1975)
- [30] C. ITZYKSON, J.-B. ZUBER, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York - London (1980)
- [31] Y. IYE, E.E. MENDEZ, W.I. WANG, L. ESAKI, *Magnetotransport properties and subband structure of the two-dimensional hole gas in GaAs-Ga<sub>1-x</sub>Al<sub>x</sub>As heterostructures*, Phys. Rev. B **33**, 5854-5857 (1980)
- [32] M. JANSSEN, O. VIEHWEGER, U. FASTENRATH, J. HAJDU, *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*, Verlag Chemie, Weinheim (1994)
- [33] S. KAWAJI, T. IGARASHI, J. WAKABAYASHI, *Quantum galvanomagnetic effect in n-channel silicon inversion layers under strong magnetic fields*, Suppl. Progr. Theor. Phys. **57**, 176-186 (1975)
- [34] D.E. KHMEL’NITZKII, *Quantization of Hall conductivity*, JETP Lett. **38**, 552-556 (1983)
- [35] A. KHURANA, *Universal singular behavior is observed in quantum Hall effect*, Physics Today **Sept 88**, 21-23 (1988)

- [36] A. KHURANA, *Ballistic electron transport through a narrow channel is quantized*, Physics Today **Nov 88**, 21-23 (1988)
- [37] T. KINOSHITA, *The fine structure constant*, Preprint, Ithaca N.Y., Cornell University, CLNS 96/1406, April 1996
- [38] S. KIVELSON, D.-H. LEE, and S.-C. ZHANG, *Global phase diagram in the quantum Hall effect*, Phys. Rev. **B46**, 2223-2238 (1992)
- [39] S. KIVELSON, D.-H. LEE, S.-H. ZHANG, *Quanten-Hall-Effekt und Supraleitung*, Spektrum der Wissenschaft **Mai 96**, 52-58 (1996)
- [40] K. VON KLITZING, G. DORDA, and M. PEPPER, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494-497 (1980)
- [41] C. KITTEL, *Einführung in die Festkörperphysik*, R. Oldenbourg Verlag, München - Wien, und John Wiley & Sons GmbH, Frankfurt (1973)
- [42] K. VON KLITZING, *Der Quanten-Hall-Effekt*, Spektrum der Wiss. **3/86**, 46-57 (1986)
- [43] K. VON KLITZING, *Ten Years Quantum Hall Effect*, Festkörperprobleme (Advances in Solid State Physics) **30**, 25-39 (1990)
- [44] L.D. LANDAU, E.M. LIFSCHITZ, *Lehrbuch der Theoretischen Physik III, Quantenmechanik*, Akademie-Verlag, Berlin (1963)
- [45] R. LANDAUER, *Electric transport in open and closed systems*, Z. Phys. **B68**, 217-228 (1987)
- [46] G. LANDWEHR, *Zur Entdeckung des Quanten-Hall-Effektes*, Phys. Bl. **41**, 357-362 (1985)
- [47] G. LANDWEHR, *10 years quantum Hall effect*, Hamburg, DESY-Kolloquium, Donnerstag, den 01.02.90, 17:00 c.t. (ab 17:00 Uhr Tee im Vorraum). Der Autor dankt Herrn Professor LANDWEHR für die Aushändigung seiner Vortragsfolien zum Fotokopieren.

- [48] D.V. LANG, R.A. LOGAN, *Trapping characteristicsa donor-complex (DX) model for the persistent-photoconductivity trapping center in Te-doped  $Al_xGa_{1-x}As$* , Phys. Rev. **B19**, 1015-1030 (1979)
- [49] R.B. LAUGHLIN, *Quantized Hall conductivity in two dimensions*, Phys. Rev. **B23**, 5632-5633 (1981)
- [50] H. LEVINE, S.B. LIBBY, and A.M.M. PRUISKEN, *Theory of the quantized Hall effect I*, Nucl. Phys. **B240** (FS12), 30-48 (1984); *II*, Nucl. Phys. **B240** (FS12), 49-70 (1984); *III*, Nucl. Phys. **B240** (FS12), 71-90 (1984)
- [51] R. MUELLER, *Grundlagen der Halbleiterphysik*, Springer-Verlag, Berlin (1979)
- [52] N.N., Karikaturist und Quelle leider nicht bekannt. Für Hinweise wäre der Autor dankbar.
- [53] N.N., *Magneto-Quantentransport am zweidimensionalen Elektronengas*, Praktikumsanleitung, München (1994)
- [54] N.N., *Quanten-Hall-Effekt*, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig, 1-62 (1991)
- [55] N.N., *Supraleitung und verwandte Quantenphänomene*, 19. IFF-Ferienkurs, Kernforschungsanlage Jülich (1988)
- [56] G.S. OHM, *Die galvanische Kette - mathematisch betrachtet* (1827)
- [57] L.J. VAN DER PAUW, *A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape*, Philips Research Reports **13**, 1-9 (1958)
- [58] R.E. PRANGE, *Quantized Hall resistance and the measurement of the fine-structure constant*, Phys. Rev. **B23**, 4802-4805 (1981)
- [59] R.E. PRANGE, S.M. GIRVIN, *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, Berlin (1987)

- [60] A.M.M. PRUISKEN, *On localization in the theory of the quantized Hall effect: A two-dimensional realization of the theta vacuum*, Nucl. Phys. **B235**, FS[11] 277-298 (1984)
- [61] A. SOMMERFELD, H. BETHE, *Elektronentheorie der Metalle*, Handbuch der Physik **24/2**, ed. H. GEIGER, J. SCHEEL, pp. 333-622, Springer, Berlin (1933)
- [62] STANFORD RESEARCH SYSTEMS, *SR850 Dual Phase DSP Lock-In Amplifier*, Bedienungsanleitung (© SRS)
- [63] S.M. SZE, *Physics of Semiconductor Devices*, John Wiley & Sons, New York (1981)
- [64] K.J. THOMAS, J.T. NICHOLLS, M.Y. SIMMONS, M. PEPPER, D.R. MACE, D.A. RITCHIE, *Possible spin polarization in a one-dimensional electron gas*, Phys. Rev. Lett. **77**, 135-138 (1996)
- [65] R.D. TSCHESCHNER, A.D. WIECK, *Quantum ballistic transport in in-plane-gate transistors showing onset of a novel ferromagnetic phase transition*, Superlattices and Microstructures **20**, 615-622 (1996)
- [66] D.C. TSUI, H.L. STÖRMER, A.C. GOSSARD, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559-1562 (1982)
- [67] L.C. VAN HOVE, *Sur certaines représentations unitaires d'un groupe infini de transformations*, Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique (Classe de Sci.) t. **XXVI**, 61-102 (1951)
- [68] B.J. VAN WEES *et al.*, *Quantized conductance of point contact in a two dimensional electron gas*, Phys. Rev. Lett. **60**, 848-850 (1988)
- [69] W. WEIDLICH, *Thermodynamik und statistische Mechanik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1976)
- [70] D.A. WHARAM *et al.*, *One dimensional transport and the quantization of the ballistic resistance*, J. Phys. **C21**, 209-214 (1988)

- [71] D.A. WHARAM *et al.*, *Addition of the one-dimensional quantized ballistic resistance*, J. Phys. **C21**, L887-L891 (1988)
- [72] D.A. WHARAM *et al.*, *Ballistic electron transport in quasi-one-dimensional systems*, Surf. Sci. **229**, 233-238 (1990)
- [73] T.O. WIEGARD, *Magnetotransportuntersuchungen an niedrigdimensionalen Halbleiter-Mikrostrukturen*, Diplomarbeit, Institut für Angewandte Physik und Zentrum für Mikrostrukturforschung der Universität Hamburg (1995)
- [74] T.T. WU, C.N. YANG, *Concept of non-integrable phase factors and global formulation of gauge fields*, Phys. Rev. **D14**, 437-445 (1976)
- [75] C.N. YANG, *Charge quantization, compactness of the gauge group, flux quantization*, Phys. Rev. **D1**, 2360 (1970)
- [76] C.N. YANG, *Einstein's impact on theoretical physics*, Physics Today **Jun 80**, 42-49 (1980)
- [77] S.-C. ZHANG, T.H. HANSON, and S. KIVELSON, *Effective-field-theory model for the fractional quantum Hall effect*, Phys. Rev. Lett. **62**, 82-85 (1989)
- [78] S.-C. ZHANG, *The Chern-Simons-Landau-Ginzburg theory of the fractional quantum Hall effect*, Int. J. Mod. Phys. B6, 25-58 (1992)